

ORPB – Mémoire 2021-02

L'interférométrie en radioastronomie Théorie et pratique - première partie

Rédacteur : A. Gilloire – version 1 15/11/2021

Préambule et but de ce mémoire

L'interférométrie est une technique instrumentale développée au siècle dernier pour s'affranchir de la limite de résolution angulaire des instruments d'observation astronomique. Cette limite interdit d'observer des détails fins sur les objets étendus et de séparer deux objets proches.

Ce mémoire a pour but d'exposer de façon pédagogique les principes de l'interférométrie en radioastronomie, et de détailler les aspects pratiques les plus importants pour exploiter au mieux ces principes, réaliser un interféromètre opérationnel et l'exploiter. Les raisonnements pour obtenir les principaux résultats sont détaillés et les calculs, qui sont basés sur les fonctions trigonométriques, du niveau majoritairement enseignement secondaire, sont développés dans le texte pour que le lecteur puisse comprendre comment on obtient ces résultats ; on peut en ignorer les détails. Les principaux résultats, illustrés par des schémas et des figures, sont encadrés.

La première partie du mémoire est consacrée à la théorie élémentaire de l'interféromètre à deux antennes. Nous suivons une approche d'optique géométrique plane; l'effet de la diffraction est représenté par la dépendance angulaire de la réponse des antennes. Les notions de cohérence spatiale et de cohérence temporelle sont introduites sommairement

La seconde partie du mémoire traitera de la synthèse d'ouverture et de l'interférométrie à très longue base, ainsi que des aspects pratiques de la réalisation des interféromètres et des observations.

Les formules de trigonométrie de base, la représentation complexe et des éléments sur la transformation de Fourier sont rappelées en annexe. Une bibliographie est donnée en fin de document.

Table des matières

1.Pouvoir séparateur et limite de résolution des télescopes	2
2.L'interféromètre à deux éléments.....	2
2.1.Observation d'une source ponctuelle monochromatique.....	4
2.2.Observation d'une source ponctuelle en face de l'interféromètre.....	6
2.3.Observation d'une source ponctuelle suivant un angle quelconque.....	8
2.4.Observation de deux sources ponctuelles monochromatiques.....	9
2.5.Observation d'une source monochromatique non ponctuelle.....	13
2.6.Observation d'une source ponctuelle dans un champ diffus.....	16
2.7.Observation d'une source de largeur de bande non nulle.....	17
3.Conclusion.....	21
4.Annexe : quelques rappels mathématiques.....	22
4.1.Formules trigonométriques de base.....	22
4.2.Représentation complexe.....	22
4.3.Transformation de Fourier et relations fondamentales	23
5.Références bibliographiques et sites internet.....	25

1. Pouvoir séparateur et limite de résolution des télescopes

Le pouvoir séparateur d'un instrument d'optique - ceci est également valable en radioastronomie - est sa capacité à distinguer les détails d'un objet. Cette capacité est limitée par la diffraction des ondes par les bords de l'ouverture (ou *pupille*) de l'instrument; elle est directement liée à la fonction d'étalement de point (PSF pour *Point Spread Function*), qui en astronomie est la réponse de l'instrument à une onde plane arrivant dans l'axe optique de celui-ci. C'est la fonction d'Airy bien connue (voir figure 1), dans le cas d'un instrument (télescope, antenne) à ouverture circulaire illuminée uniformément. Pour un radiotélescope à réflecteur parabolique, c'est la courbe de gain de l'antenne en fonction de l'écart angulaire par rapport à l'axe de la parabole.

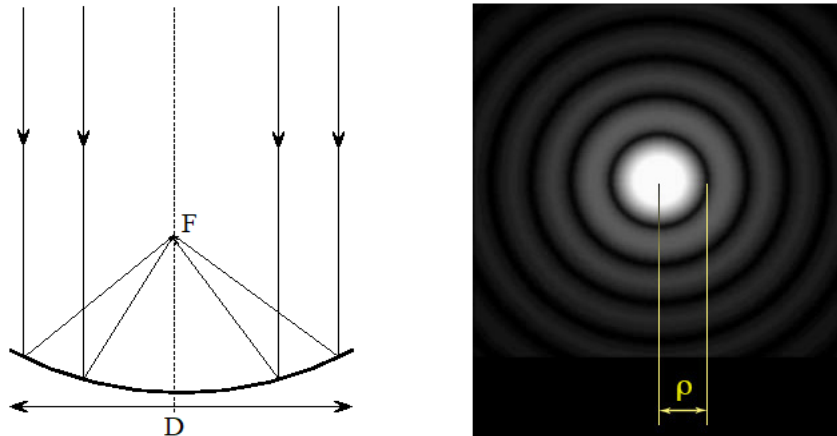


Figure 1: tache d'Airy produite par l'illumination uniforme d'un télescope à ouverture circulaire.

Crédit: http://www.astrosurf.com/agerard/quesako/formules_optiques.html

La tache d'Airy est donc l'image d'une source ponctuelle à l'infini produite par ce type d'ouverture. Si D est le diamètre du réflecteur et λ la longueur d'onde, le diamètre du disque lumineux central s'exprime par $2\rho = 2,44 \lambda / D$ en radians, pour D et λ en mètres. Quelques exemples :

télescope de diamètre 2 m, lumière verte $0,55 \mu$: $2\rho = 0,14$ seconde d'arc

pupille humaine diamètre 5 mm ; lumière verte $0,55 \mu$: $2\rho \approx 0,9$ minute d'arc

antenne parabolique de diamètre 15 m, radio millimétrique 1,5 mm : $2\rho = 0,84$ minute d'arc

antenne parabolique de diamètre 13 m, radio décimétrique 21 cm : $2\rho = 2,26$ degrés

Le document [Mai12] montre des images illustrant visuellement le pouvoir séparateur.

Le pouvoir séparateur - ou pouvoir de résolution - peut être quantifié de différentes façons. Par exemple, suivant le critère de Rayleigh (Bor08 p. 371), on considère que deux détails de même luminosité d'un objet sont discernables si le maximum d'intensité de l'« image » (*i.e.* la tache d'Airy) de l'un coïncide avec le premier minimum d'intensité de l'image de l'autre. On dira que les deux détails de l'objet sont juste résolus.

2. L'interféromètre à deux éléments

Ce dispositif s'inspire du principe de l'interféromètre optique construit par Michelson et Pease pour la mesure des diamètres stellaires, voir figure 2. C'est une version plus performante de l'interféromètre optique imaginé et construit par Fizeau, lequel a permis de mesurer les diamètres des satellites de Jupiter mais s'est avéré insuffisant pour résoudre les étoiles.

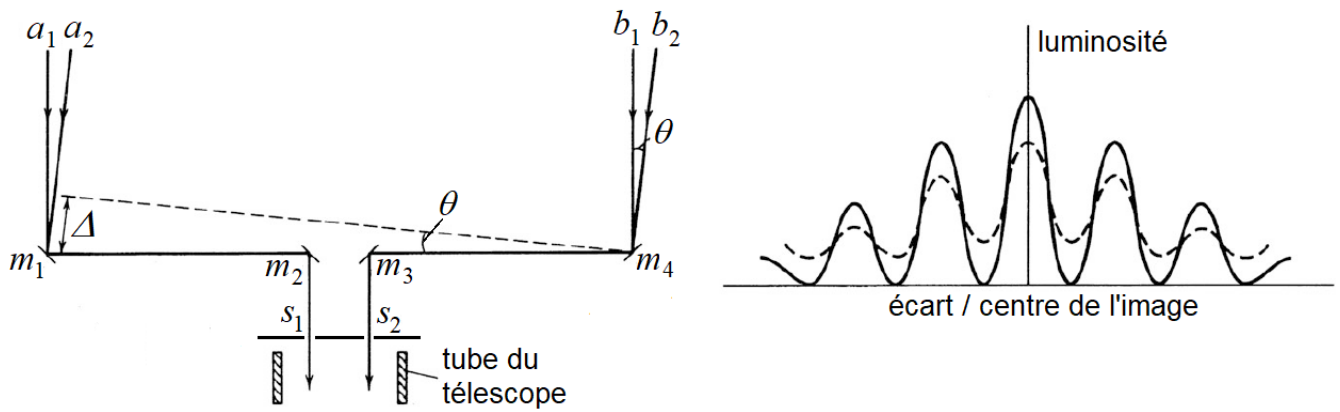


Figure 2: schéma de principe de l'interféromètre stellaire de Michelson et Pease (d'après [Tho16] p.15)

Les rayons incidents sont canalisés vers l'entrée du télescope par les miroirs m_1 , m_2 , m_3 et m_4 et collimatés par les fentes s_1 et s_2 . La distance entre m_1 et m_4 définit la longueur de base b de l'interféromètre (b valait au maximum 6 m dans l'appareillage de Michelson). Les trajets des rayons a_1 et b_1 jusqu'à l'oculaire ont la même longueur, mais les rayons a_2 et b_2 , qui forment l'angle θ avec la ligne de base de l'instrument, suivent des chemins dont la longueur diffère de $\Delta = b \sin \theta$.

La figure à droite montre la variation de l'intensité lumineuse en fonction de θ . La ligne en trait plein correspond à un objet non résolu et celle en tirets à un objet partiellement résolu.

Cet instrument a permis de mesurer notamment le diamètre de l'étoile Bételgeuse (α Orionis), supergante rouge distante de 640 années-lumière ; il vaut environ 900 diamètres solaires.

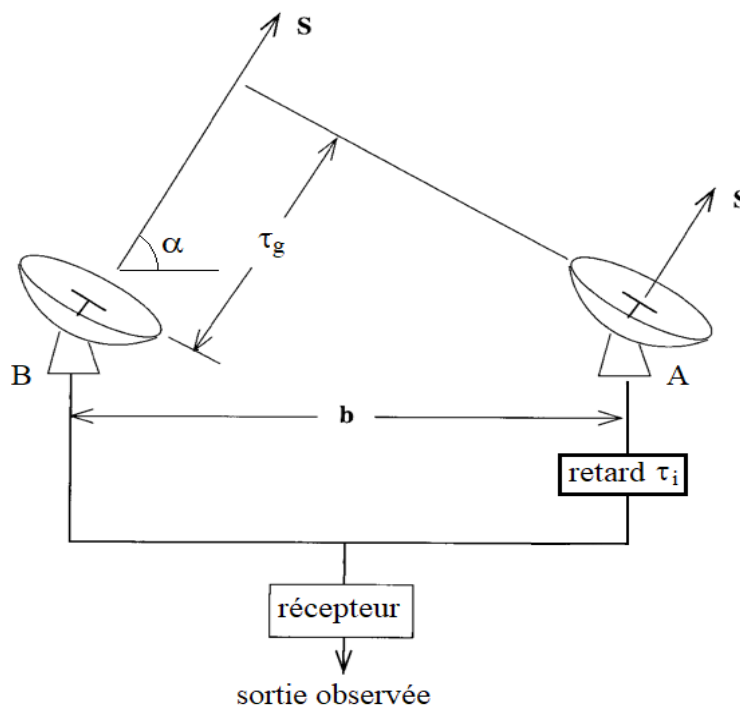


Figure 3: schéma de principe de l'interféromètre radio à deux antennes (d'après [Bur10])

Sur la figure 3 ci-dessus, le vecteur \mathbf{b} de *ligne de base* relie les centres de phase des deux antennes. Si celles-ci sont identiques, d'autres points caractéristiques des antennes peuvent être pris en compte, par exemple les sommets (*vertex*) dans le cas d'antennes à réflecteur parabolique, ou encore le point de croisement des axes dans le cas d'antennes à monture alt-azimutale.

τ_g est le *retard géométrique* subi par l'onde plane lorsqu'elle arrive sur l'antenne B par rapport au temps d'arrivée de celle-ci sur l'antenne A. Le *retard instrumental* τ_i est introduit dans la branche de l'antenne A pour compenser le retard géométrique correspondant au pointage des antennes dans la direction de la radio-source observée, comme on le verra plus loin.

Le schéma de principe de la figure 3 est bien sûr très simplifié : n'y figurent pas les amplificateurs, mélangeurs, filtrages etc. qui permettent de conditionner correctement les signaux à l'entrée du module dénommé récepteur sur la figure. Ces dispositifs n'ont pas d'incidence sur les résultats de l'étude théorique simplifiée qui suit ; nous les mettons donc de côté pour l'instant.

2.1. Observation d'une source ponctuelle monochromatique

Nous considérons dans un premier temps une radio-source ponctuelle monochromatique à l'infini. Le concept de source ponctuelle monochromatique (ou quasi-monochromatique) peut paraître restrictif; cependant, nous verrons plus loin que ce modèle, bien que sans réalité physique, permet de raisonner sur des exemples simples avant de généraliser le problème aux radio-sources spatialement étendues et non monochromatiques.

Soit \mathbf{s} le vecteur unitaire définissant la direction de visée des deux antennes vers la radio-source observée. Celle-ci étant supposée à l'infini, les ondes reçues au niveau des antennes sont planes.

Suivant le schéma de la figure 3, le trajet des ondes reçues par l'antenne B est augmenté de $b \cos \alpha$ par rapport à celui des ondes reçues par l'antenne A, ce qui correspond au retard géométrique $\tau_g = b \cos \alpha / c$, ou encore : $\tau_g = \mathbf{b} \cdot \mathbf{s} / c$, où b est la longueur du vecteur \mathbf{b} , \mathbf{s} est le vecteur unitaire orienté dans la direction de la source, α est l'angle entre la direction de visée (vecteur \mathbf{s}) et la ligne de base (vecteur \mathbf{b}), et c est la vitesse de propagation de l'onde incidente au niveau des antennes¹; \cdot désigne le produit scalaire.

Considérons une onde monochromatique de longueur d'onde λ . Les signaux électriques, ici des tensions par exemple, en sortie de l'antenne A et de l'antenne B peuvent s'écrire respectivement :

$$x(t) = \xi \sqrt{S_\lambda A_\lambda(\mathbf{s})} \sin(2\pi \frac{c}{\lambda}(t - \tau_i) + \phi(t)) \quad (1a)$$

$$y(t) = \xi \sqrt{S_\lambda A_\lambda(\mathbf{s})} \sin(2\pi \frac{c}{\lambda}(t - \tau_g) + \phi(t - \tau_g)) \quad (1b)$$

où S_λ est le flux de puissance à la longueur d'onde λ reçu au niveau des antennes, $A_\lambda(\mathbf{s})$ est l'aire efficace à la longueur d'onde λ de chaque antenne orientée suivant la direction \mathbf{s} , et ξ un coefficient dimensionnel, homogène ici à une impédance à la puissance 1/2. $\phi(t)$ est la composante de phase due aux caractéristiques aléatoires de l'émission de l'objet observé. Suivant le modèle idéalisé d'une source parfaitement monochromatique donc parfaitement cohérente, nous pouvons considérer cette phase comme constante, c'est-à-dire: $\phi(t) = \phi(t - \tau_g) = \phi$ ², constante dont la valeur est arbitraire et que l'on choisira nulle.

C'est en faisant interférer ces deux signaux que l'on va pouvoir exploiter la puissance du dispositif de la figure 3 pour augmenter considérablement le pouvoir séparateur par rapport à celui d'une antenne unique.

Sachant que l'on observera *in fine* des quantités homogènes à des puissances électriques, une façon directe de faire interférer les signaux x et y est de calculer leur produit :

1 On écrira par exemple $c = c_0 / n$ où c_0 est la vitesse de la lumière dans le vide et n l'indice de réfraction de l'air .

2 l'hypothèse d'une composante de phase constante ne correspond pas à la réalité physique; elle sera levée au § 2.7, où on raisonnera sur des signaux non monochromatiques en introduisant la notion de cohérence temporelle.

$$x(t) \cdot y(t) = \xi^2 S_\lambda A_\lambda(\mathbf{s}) \sin\left(2\pi \frac{c}{\lambda}(t - \tau_i)\right) \cdot \sin\left(2\pi \frac{c}{\lambda}(t - \tau_g)\right) \quad (2)$$

soit :

$$x(t) \cdot y(t) = 0,5 \xi^2 S_\lambda A_\lambda(\mathbf{s}) \left[\cos\left(2\pi \frac{c}{\lambda}(\tau_g - \tau_i)\right) - \cos\left(2\pi \frac{c}{\lambda}(2t - (\tau_g + \tau_i))\right) \right] \quad (3)$$

Si nous appliquons à ce produit un filtrage passe-bas avec une fréquence de coupure suffisamment faible, c'est-à-dire très inférieure à $f = c/\lambda$, nous éliminons le terme dépendant du temps oscillant à deux fois cette fréquence. Ce filtrage passe-bas peut être obtenu par moyennage temporel, c'est-à-dire par intégration sur une durée très supérieure à la période $1/f$ du signal d'origine. On retrouve ainsi la fonction d'intercorrélation entre les signaux x et y , soit en normalisant l'impédance ξ^2 à 1 et en oubliant le coefficient 0,5 :

$R_{xy}(\tau_g - \tau_i) = S_\lambda A_\lambda(\mathbf{s}) \cos\left(2\pi \frac{c}{\lambda}(\tau_g - \tau_i)\right)$

avec $\tau_g = \mathbf{b} \cdot \mathbf{s} / c$ (4)

La fonction d'intercorrélation entre les signaux x et y oscille donc suivant la variation du retard géométrique τ_g , c'est-à-dire suivant la variation de la direction de visée. La figure 4 illustre le principe de l'interféromètre à corrélateur.

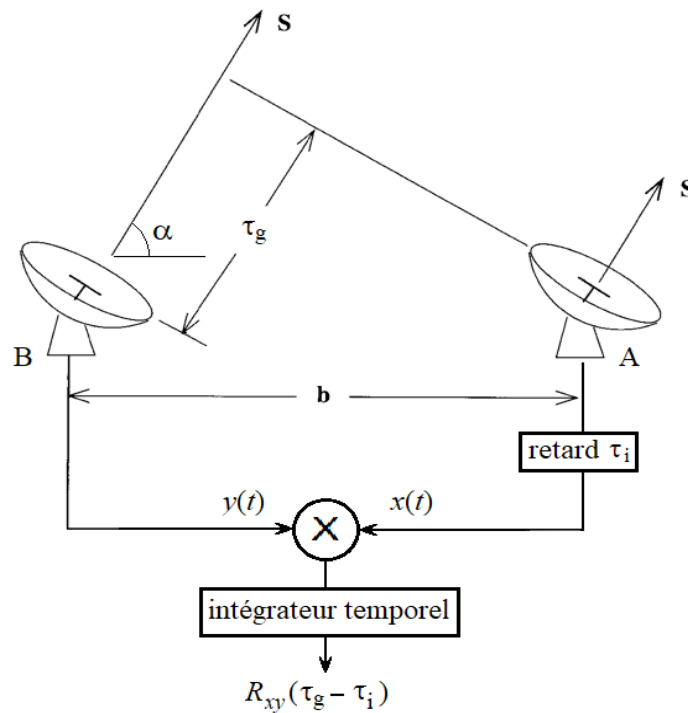


Figure 4: schéma de principe de l'interféromètre à deux antennes à corrélateur

Les premiers interféromètres radio utilisaient une technique analogique consistant en la sommation des signaux x et y et le passage de cette somme dans un détecteur quadratique, suivi d'une intégration temporelle. Voyons le lien entre cette technique et le calcul de la fonction de corrélation mis en œuvre dans les instruments modernes.

Nous avons, après intégration temporelle de la sortie du détecteur quadratique :

$$\langle (x(t) + y(t))^2 \rangle = \langle x^2(t) \rangle + \langle y^2(t) \rangle + 2 \langle x(t) \cdot y(t) \rangle \quad (5)$$

où $\langle \cdot \rangle$ représente l'opération d'intégration temporelle. Nous reconnaissons dans le dernier terme deux

fois la fonction d'intercorrélation entre les signaux x et y . Les deux premiers termes correspondent à la valeur quadratique moyenne des signaux x et y respectivement.

Reprenant l'expression (1a) du signal x , nous avons, en négligeant le terme de phase $\phi(t)$:

$$\langle x^2(t) \rangle = \xi^2 S_\lambda A_\lambda(s) \langle \sin^2(2\pi \frac{c}{\lambda}(t-t_i)) \rangle = \frac{1}{2} \xi^2 S_\lambda A_\lambda(s) \quad (6)$$

avec un résultat similaire pour le signal y . Les deux premiers termes de (5) forment donc un plancher proportionnel à l'aire efficace $A_\lambda(s)$, auquel se superposent les franges d'interférence correspondant à la fonction d'intercorrélation (4). Dans le paragraphe suivant, nous comparons les deux techniques sur un exemple simple.

2.2. Observation d'une source ponctuelle en face de l'interféromètre

Considérons maintenant le cas particulier important où l'angle de visée α est égal à 90° (figure 5). C'est typiquement le cas lorsqu'on observe un objet qui transite lors de son passage au méridien devant l'instrument disposé suivant une base Est-Ouest, les antennes visant vers le Sud. Le retard instrumental τ_i est alors inutile.

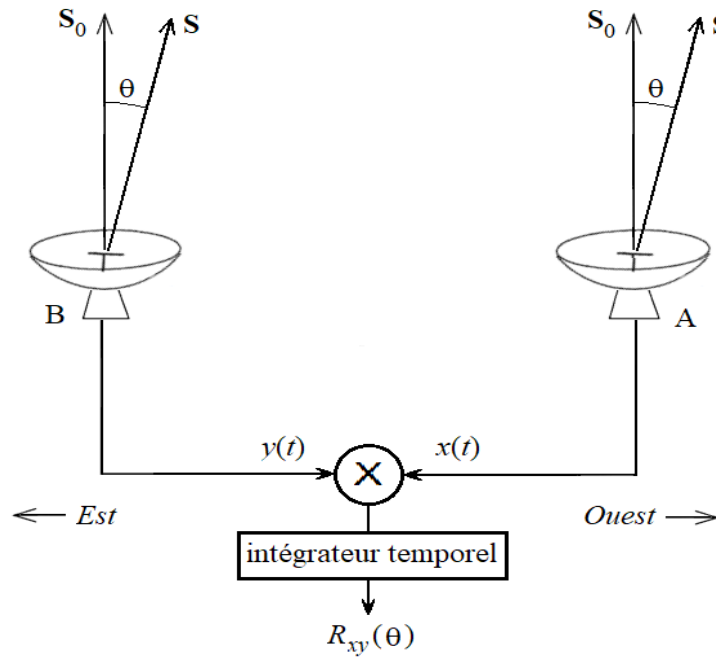


Figure 5: interféromètre à corrélateur de base orientée Est-Ouest et visant vers le Sud

Lors du transit, l'angle θ entre la direction s de l'objet et la direction de visée s_0 balaie la réponse angulaire des antennes, autrement dit leur diagramme de directivité, que l'on exprime comme fonction de θ . Le retard géométrique s'écrit alors $\tau_g = b \sin \theta / c$ et la fonction d'intercorrélation (4) devient :

$$R_{xy}(\theta) = S_\lambda A_\lambda(\theta) \cos(2\pi \frac{b}{\lambda} \sin \theta) \quad (7)$$

Dans le cas d'antennes très directives, la réponse angulaire significative est limitée à un petit domaine angulaire $[-\theta_0, +\theta_0]$ et sur ce domaine la fonction d'intercorrélation (7) peut s'écrire :

$$R_{xy}(\theta) \approx S_\lambda A_\lambda(\theta) \cos(2\pi \frac{b}{\lambda} \theta) \quad (8)$$

et prend la forme représentée figure 6. Les oscillations rapides sont les franges d'interférence, dont l'amplitude est modulée par le diagramme de directivité des antennes, et dont la période est λ / b . L'inverse de cette période est la *fréquence spatiale*, mesurée en nombre de périodes par unité d'angle.

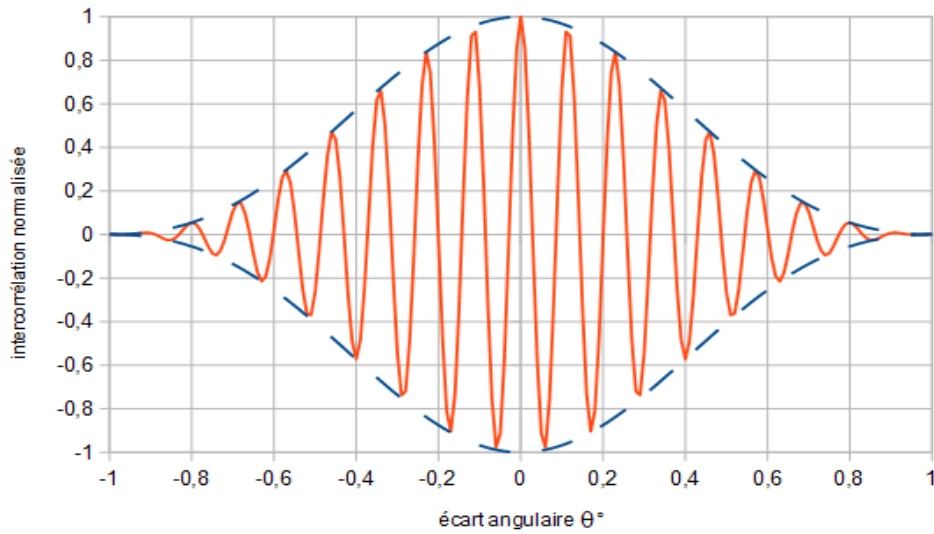


Figure 6: fonction d'intercorrélacion normalisée (en rouge) dans le cas des petits angles enveloppe (en bleu): réponse angulaire d'une antenne unique de la forme sinus cardinal au carré, et de largeur à mi-puissance environ 1 degré; rapport $b / \lambda = 500$, soit une période de frange de $\sim 0,115^\circ$

Voyons maintenant ce que l'on obtient en sortie de l'interféromètre à sommateur évoqué au § 2.1. Reprenant la formule (6), nous avons, toujours en normalisant l'impédance ξ^2 à 1:

$$\langle x^2(t) \rangle = \langle y^2(t) \rangle = \frac{1}{2} S_\lambda A_\lambda(\theta) \quad \text{et pour le terme d'intercorrélacion de l'équation (5), repris de (7) en}$$

$$\text{restaurant le facteur 0,5: } 2 \langle x(t) \cdot y(t) \rangle = 2 R_{xy}(\theta) = S_\lambda A_\lambda(\theta) \cos\left(2\pi \frac{b}{\lambda} \sin \theta\right) .$$

Nous avons donc en sortie de l'intégrateur de l'interféromètre:

$$\langle x^2(t) \rangle + \langle y^2(t) \rangle + 2 \langle x(t) \cdot y(t) \rangle = S_\lambda A_\lambda(\theta) [1 + \cos\left(2\pi \frac{b}{\lambda} \sin \theta\right)] \quad (9)$$

La figure 7 montre ce résultat dans le cas des petits angles, avec les mêmes conditions de simulation que celles de la figure 6. Le rehaussement du système de franges est causé par les termes de puissance.

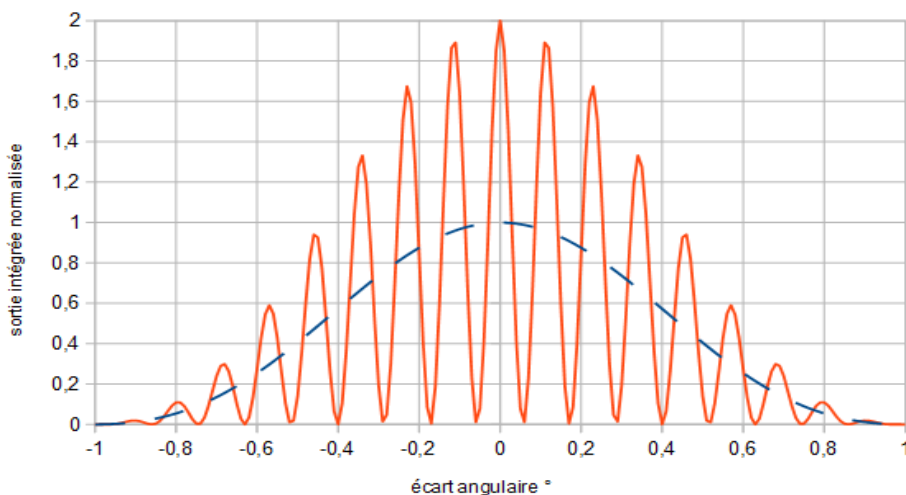


Figure 7: système de franges en sortie de l'interféromètre à sommateur. En bleu: réponse d'antenne.

2.3. Observation d'une source ponctuelle suivant un angle quelconque

Dans le paragraphe précédent, nous avons abouti aux résultats (7) et (8) dans le cas particulier d'une source transitant au méridien (donc au Sud) devant un interféromètre de base orientée Est-Ouest. Nous pouvons généraliser ce résultat au cas d'une source située dans une direction \mathbf{s} quelconque.

Soit α l'angle entre la ligne de base et la direction de visée des antennes \mathbf{s}_0 , et θ l'angle entre \mathbf{s}_0 et la direction de la source \mathbf{s} (figure 8).

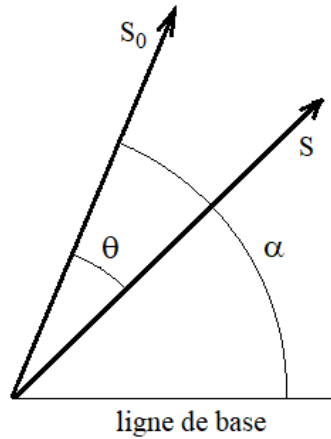


Figure 8: géométrie pour la visée suivant un angle α quelconque

Le retard géométrique τ_g et le retard instrumental τ_i (cf. figure 4) s'écrivent respectivement $\tau_g = \mathbf{b} \cdot \mathbf{s} / c = b \cdot \cos(\alpha - \theta) / c$ et $\tau_i = \mathbf{b} \cdot \mathbf{s}_0 / c = b \cdot \cos \alpha / c$

La fonction d'intercorrélation (4) entre les signaux issus des deux antennes s'écrit alors:

$$R_{xy}(\tau_g - \tau_i) = S_\lambda A_\lambda(\mathbf{s}) \cos\left(2\pi \frac{b}{\lambda} \cdot [\cos(\alpha - \theta) - \cos \alpha]\right) \quad (10)$$

soit pour les petits angles θ , l'intercorrélation s'écrit, comme fonction des angles α et θ :

$$R_{xy}(\theta, \alpha) \approx S_\lambda A_\lambda(\theta) \cos\left(2\pi \frac{b \sin \alpha}{\lambda} \theta\right) \quad (11)$$

Comparant avec l'expression (8) obtenue dans le cas de la visée perpendiculaire à la ligne de base, soit pour $\alpha = \pi/2$, nous observons que *tout se passe comme si la longueur de la ligne de base était réduite dans le rapport $\sin \alpha$* , entraînant un élargissement des franges c'est-à-dire une diminution de la fréquence spatiale. Comparer la figure 6 (visée en face) et la figure 9 où l'angle de visée est de 45° .

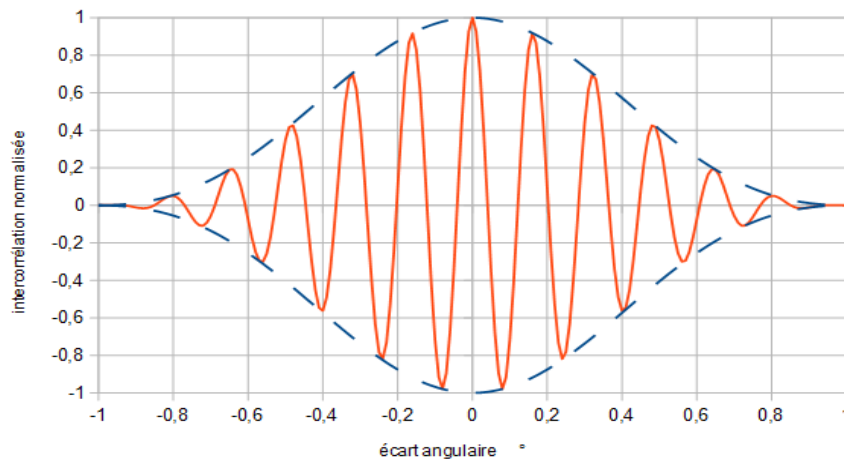


Figure 9: franges obtenues pour la visée à 45° . Conditions de simulation identiques à figure 6.

A la limite, si la direction de la source est alignée avec la ligne de base, la fréquence spatiale est nulle et les franges d'interférence disparaissent ; la résolution de l'instrument devient identique à celle d'une antenne unique.

L'observation de la source suivant des directions s_0 différentes fournit donc des interférogrammes correspondant à des fréquences spatiales différentes, à partir desquels il sera possible de déduire certaines caractéristiques de la source, comme on le verra dans les paragraphes suivants.

2.4. Observation de deux sources ponctuelles monochromatiques

Adaptons l'étude précédente au cas de deux sources ponctuelles monochromatiques distinctes. C'est un cas idéalisé mais il peut représenter de façon simpliste certains objets réels, et il permet d'introduire une méthodologie qui sera utile dans l'étude de la réponse de l'interféromètre aux sources étendues.

La figure 10 représente la configuration étudiée. On suppose que les deux sources, qui se déplacent à la même vitesse apparente, transitent devant l'interféromètre visant au Sud, comme dans le cas étudié au § 2.2 avec une seule source.

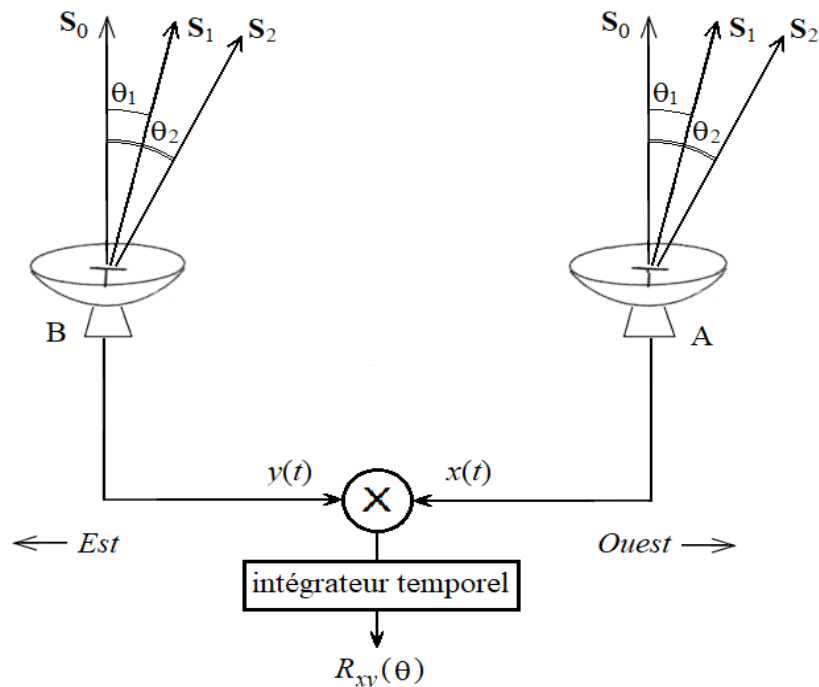


Figure 10: observation de deux sources ponctuelles distinctes

Soit θ_1 l'angle entre la direction s_1 de la première source et la direction de visée s_0 de l'interféromètre, et θ_2 l'angle entre la direction s_2 de la seconde source et la direction de visée. Les deux sources sont donc séparées par la distance angulaire $\theta_2 - \theta_1$. Pour simplifier les notations et les calculs, on suppose dans un premier temps que les flux de puissance S_λ provenant des deux sources sont identiques, et on les normalise à 1. Enfin, comme précédemment, on normalise l'impédance ξ^2 à 1 et, les sources étant supposées monochromatiques, on néglige les termes de phase ϕ .

Nous avons maintenant en sortie de chaque antenne la somme des signaux provenant de chacune des deux sources, soit $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ et $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$, avec:

$$x_1(t) = \sqrt{A_\lambda(\theta_1)} \sin(2\pi \frac{c}{\lambda} t) \quad , \quad x_2(t) = \sqrt{A_\lambda(\theta_2)} \sin(2\pi \frac{c}{\lambda} t)$$

pour les composantes du signal en sortie de l'antenne A, et:

$$y_1(t) = \sqrt{A_\lambda(\theta_1)} \sin(2\pi \frac{c}{\lambda}(t - \tau_{g1})) \quad , \quad y_2(t) = \sqrt{A_\lambda(\theta_2)} \sin(2\pi \frac{c}{\lambda}(t - \tau_{g2}))$$

pour les composantes du signal en sortie de l'antenne B, les retards géométriques valant respectivement

$$\tau_{g1} = b \sin \theta_1 / c \quad \text{et} \quad \tau_{g2} = b \sin \theta_2 / c \quad .$$

Calculons l'intercorrélation entre les signaux en sortie des deux antennes:

$$\langle x(t) \cdot y(t) \rangle = \langle (x_1(t) + x_2(t)) \cdot (y_1(t) + y_2(t)) \rangle$$

soit, en développant:

$$\langle x(t) \cdot y(t) \rangle = \langle x_1(t) \cdot y_1(t) \rangle + \langle x_2(t) \cdot y_2(t) \rangle + \langle x_1(t) \cdot y_2(t) \rangle + \langle x_2(t) \cdot y_1(t) \rangle$$

Nous supposons maintenant que les deux sources sont décorréliées entre elles, ce qui correspond en général à la réalité physique. Les moyennes des produits croisés (les deux derniers termes de l'équation ci-dessus) sont donc nulles, et l'intercorrélation entre les signaux en sortie des antennes se réduit à:

$$\langle x(t) \cdot y(t) \rangle = \langle x_1(t) \cdot y_1(t) \rangle + \langle x_2(t) \cdot y_2(t) \rangle$$

On reconnaît les produits d'intercorrélation $R_{xy}(\theta_1)$ et $R_{xy}(\theta_2)$ respectivement, ayant la même forme que la fonction d'intercorrélation obtenue précédemment pour une source unique (équation (7)). Nous écrirons donc:

$$\boxed{R_{xy}(\theta_1, \theta_2) = R_{xy}(\theta_1) + R_{xy}(\theta_2)} \quad (12)$$

avec: $R_{xy}(\theta_1) = A_\lambda(\theta_1) \cos(2\pi \frac{b}{\lambda} \sin \theta_1)$ et $R_{xy}(\theta_2) = A_\lambda(\theta_2) \cos(2\pi \frac{b}{\lambda} \sin \theta_2)$.

Lorsque les deux sources transitent devant l'instrument, nous obtenons donc la somme de deux termes d'intercorrélation qui conduisent à une figure d'interférences modifiée par rapport à la figure 6 qui correspond à une source unique. Nous avons en fait superposition de deux "modes" d'oscillation suivant les angles θ_1 et θ_2 .

Si nous nous limitons aux petits angles, nous obtenons la forme approchée:

$$R_{xy}(\theta_1, \theta_2) \approx A_\lambda(\theta_1) \cos(2\pi \frac{b}{\lambda} \theta_1) + A_\lambda(\theta_2) \cos(2\pi \frac{b}{\lambda} \theta_2) \quad (13)$$

Si nous appelons $\theta = 0,5(\theta_1 + \theta_2)$ l'écart angulaire entre la ligne de visée et la direction médiane entre les deux sources et posons $\theta_1 = \theta - \delta$, $\theta_2 = \theta + \delta$, où δ est la demi distance angulaire entre les deux sources, nous pouvons écrire la relation (13) comme suit:

$$R_{xy}(\theta) \approx A_\lambda(\theta - \delta) \cos(2\pi \frac{b}{\lambda}(\theta - \delta)) + A_\lambda(\theta + \delta) \cos(2\pi \frac{b}{\lambda}(\theta + \delta)) \quad (14)$$

Notons que si on rapproche les deux sources jusqu'à ce qu'elles se confondent pour $\delta = 0$, on obtient

$R_{xy}(\theta) \approx 2 \cdot A_\lambda(\theta) \cos(2\pi \frac{b}{\lambda} \theta)$. Ce résultat est une conséquence de l'hypothèse de décorrélation des deux sources, par ailleurs supposées produisant le même flux, ce qui aboutit à la multiplication par 2 de l'intercorrélation, homogène à une puissance.

La figure 11 montre la fonction d'intercorrélation de l'équation (14) pour différentes valeurs de la distance angulaire $2 \cdot \delta$ entre les deux sources, l'écart nul correspondant à une source unique étant représenté par la figure 6 du § 2.2. Les courbes sont rangées par valeurs croissantes de la distance angulaire (en minutes d'arc) de gauche à droite (ligne du haut) puis de droite à gauche (ligne du bas).

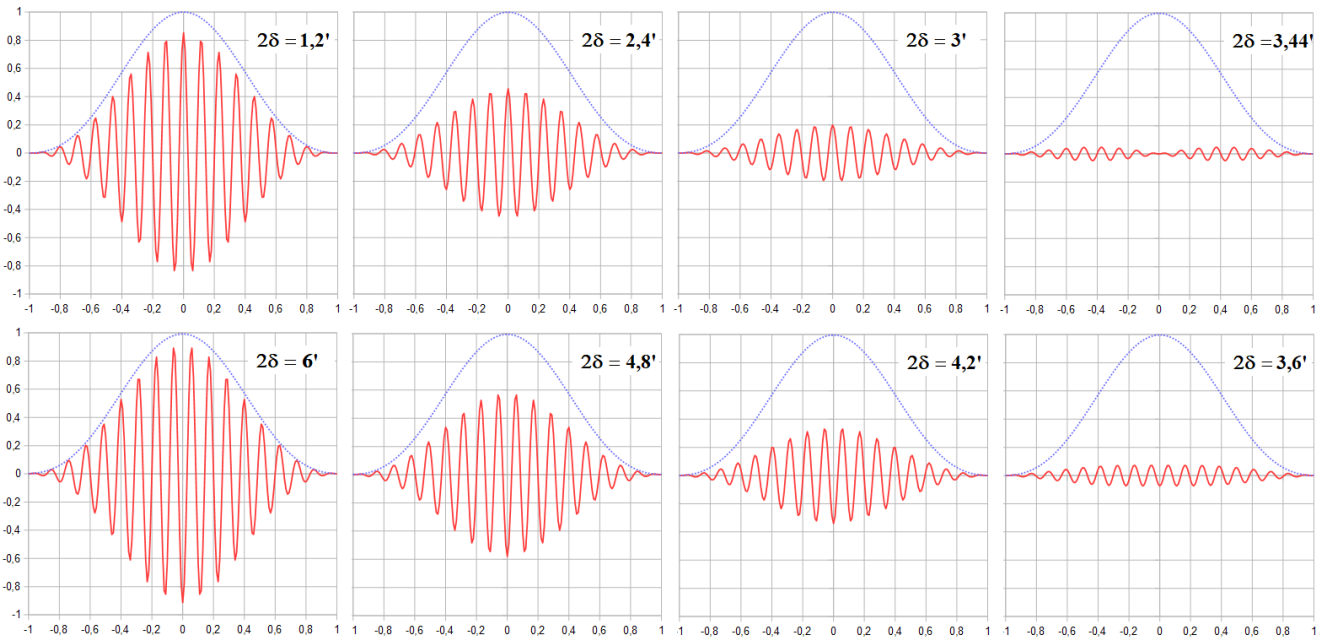


Figure 11: intercorrélation suivant (14) correspondant à des sources de distances angulaires croissantes de 1,2 minute d'arc à 6 minutes d'arc. En pointillé bleu: la réponse d'une antenne unique. En abscisse: écart angulaire médian θ en degrés ; en ordonnée: intercorrélation normalisée. Conditions de simulation identiques à figure 6.

En observant la suite des courbes, nous notons que l'amplitude des franges d'interférence décroît avec l'augmentation de la distance angulaire entre les sources, passe par un minimum puis croît. Nous dirons que la *visibilité des franges* est minimum lorsque l'amplitude relative des franges par rapport à celle de la réponse de l'antenne unique passe par un minimum, ce qui se produit ici pour la distance angulaire entre les sources de 3,44', où nous notons que l'amplitude de la frange centrale est nulle. Dans ce cas nous dirons que l'objet formé par les deux sources est résolu.

Voyons ceci plus en détail. Rappelant d'abord qu'en règle générale la courbe de directivité des antennes est à variation "lente" par rapport à la variation de l'angle de pointage, nous admettrons que $A_\lambda(\theta - \delta) \approx A_\lambda(\theta + \delta) \approx A_\lambda(\theta)$. Reprenant l'équation (14) avec cette approximation, nous obtenons:

$$R_{xy}(\theta) \approx A_\lambda(\theta) \left[\cos\left(2\pi \frac{b}{\lambda}(\theta - \delta)\right) + \cos\left(2\pi \frac{b}{\lambda}(\theta + \delta)\right) \right] = 2 A_\lambda(\theta) \cos\left(2\pi \frac{b}{\lambda}\theta\right) \cdot \cos\left(2\pi \frac{b}{\lambda}\delta\right) \quad (15)$$

Nous avons donc le produit de deux fonctions périodiques, l'une dépendant de l'angle θ lié au pointage, l'autre dépendant de la distance angulaire $2 \cdot \delta$ entre les sources, l'ensemble étant modulé par la courbe de directivité des antennes. C'est exactement ce que nous observons sur la suite de courbes de la figure 11.

Nous pouvons définir un critère de visibilité des franges en notant d'après (15) que le terme en cosinus dépendant de δ conditionne l'amplitude des franges: celle-ci est maximale pour $2\pi \frac{b}{\lambda}\delta = k\pi$ (k entier) et minimale pour $2\pi \frac{b}{\lambda}\delta = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, où la fonction d'intercorrélation (15) s'annule. La visibilité s'exprimera donc ici par la formule (on retrouvera ce résultat dans [Bor05] p. 306):

$$V_\lambda(b, \delta) = \left| \cos\left(2\pi \frac{b}{\lambda}\delta\right) \right| \quad (16)$$

Le premier zéro de cette fonction se produit pour $2\pi \frac{b}{\lambda}\delta = \frac{\pi}{2}$, soit pour $b = \frac{\lambda}{4\delta}$. Ceci donne une

méthode pratique pour déterminer la dimension angulaire d'une source: partant d'un espacement minimal entre les antennes, on augmente la longueur de base b (donc la fréquence spatiale) jusqu'à la première disparition des franges³; la dimension angulaire de la source est donnée, dans le cas de deux sources ponctuelles distinctes, par $2\delta = \frac{\lambda}{2b}$. Ce résultat est illustré par la courbe de la figure 11 marquée $2\delta = 3,44'$, qui correspond à la fréquence spatiale $b/\lambda = 500$ utilisée dans la simulation.

L'étude qui précède montre que la capacité de l'interféromètre à discriminer des sources est liée à la fréquence spatiale qu'il "voit". On en conclut que le *pouvoir séparateur* d'un interféromètre peut être mesuré par cette fréquence spatiale (en fait par son inverse la période spatiale). Le pouvoir séparateur est donc défini ici par l'angle $2\delta = 0,5 \lambda/b$, soit 3,44 minutes d'arc pour l'exemple étudié.

Une autre méthode permet d'obtenir la dimension angulaire du système de deux sources en mettant à profit le résultat du § 2.3, selon lequel un interféromètre de longueur de base b visant une source suivant un angle α quelconque (figure 8) se comporte comme un interféromètre de longueur de base $b \sin \alpha$ visant la même source en face; en effet, la fréquence spatiale observée est la même dans les deux cas, soit $b \sin \alpha / \lambda$.

Pour mettre en oeuvre cette méthode, il faut orienter chaque antenne dans la direction de la source au cours de sa trajectoire apparente, et compenser le retard géométrique τ_g par le retard instrumental τ_i , qui est donc fonction de l'angle α . La direction de visée, qui n'est plus perpendiculaire à la ligne de base et évolue, est appelée *phase tracking centre*. Dans le cas simple de deux sources étudié ici, la compensation du retard géométrique annule l'écart de phase entre les signaux x et y lorsque cette direction de visée coïncide avec la direction médiane des deux sources. La visibilité minimale est atteinte pour un angle α_0 tel que $b \sin \alpha_0 = \frac{\lambda}{4\delta}$. Cela suppose bien sûr que la base b soit suffisamment longue.

Pour généraliser un peu la situation précédente, considérons deux sources ponctuelles monochromatiques, produisant cette fois des flux de puissance différents $S_{1,\lambda}$ et $S_{2,\lambda}$. Nous avons donc, suivant (12):

$$R_{xy}(\theta_1, \theta_2) = R_{xy}(\theta_1) + R_{xy}(\theta_2)$$

$$\text{avec } R_{xy}(\theta_1) = A_\lambda(\theta_1) S_{1,\lambda} \cos\left(2\pi \frac{b}{\lambda} \sin \theta_1\right) \text{ et } R_{xy}(\theta_2) = A_\lambda(\theta_2) S_{2,\lambda} \cos\left(2\pi \frac{b}{\lambda} \sin \theta_2\right)$$

Dans l'approximation des petits angles et suivant le même raisonnement que ci-dessus, nous obtenons une formule plus générale que (15):

$$R_{xy}(\theta) \approx A_\lambda(\theta) \left[S_{1,\lambda} \cos\left(2\pi \frac{b}{\lambda} (\theta - \delta)\right) + S_{2,\lambda} \cos\left(2\pi \frac{b}{\lambda} (\theta + \delta)\right) \right]$$

qui peut s'écrire, en posant $S_{1,\lambda} = S_1$ et $S_{2,\lambda} = S_2$ pour alléger les notations:

$$R_{xy}(\theta) \approx A_\lambda(\theta) \left[(S_1 + S_2) \cos\left(2\pi \frac{b}{\lambda} \theta\right) \cdot \cos\left(2\pi \frac{b}{\lambda} \delta\right) + (S_1 - S_2) \sin\left(2\pi \frac{b}{\lambda} \theta\right) \cdot \sin\left(2\pi \frac{b}{\lambda} \delta\right) \right] \quad (17)$$

Le système de franges est décalé, et son amplitude dépend du rapport des flux S_1 / S_2 . On obtient aussi un minimum d'amplitude des franges pour la longueur de base $b = \frac{\lambda}{4\delta}$ comme dans le cas des sources de même flux. L'équation (17) se réduit alors à:

$$\boxed{R_{xy}(\theta) \approx A_\lambda(\theta) (S_1 - S_2) \sin\left(2\pi \frac{b}{\lambda} \theta\right)} \quad (18)$$

3 C'est la méthode utilisée par Michelson et Pease en interférométrie optique (cf. début chap. 2).

La figure 12 montre les courbes correspondantes pour les rapports $S_1/S_2=2$ et $S_1/S_2=3$. Contrairement au cas des deux sources de même flux, l'amplitude minimum des franges n'est pas nulle.

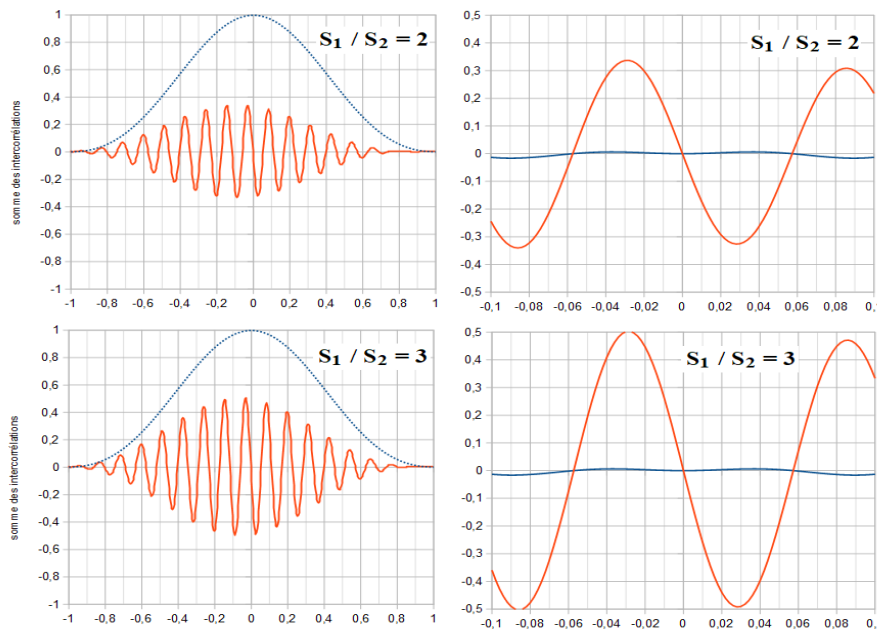


Figure 12: intercorrélation suivant (18) correspondant à des sources de flux différents.

Vues à droite: zoom sur les écarts angulaires proches de 0, avec en bleu la courbe pour les sources de même flux. Conditions de simulation identiques à figure 6.

Pour ce réglage particulier de la base, on observe que le décalage des franges est identique quel que soit le rapport des flux, et d'après (18) égal à δ . Avec cette valeur du décalage, nous avons donc sur la frange de hauteur maximum $R_{xy}(\theta) \approx A_\lambda(\theta) (S_1 - S_2)$: l'amplitude de cette frange est donc proportionnelle à la différence des flux des deux sources. Prenant conventionnellement $S_1 + S_2 = 1$ et $A_\lambda(\theta) \approx 1$ pour les petits angles, nous avons $S_1 - S_2 \approx 0,333$ pour $S_1/S_2=2$ et $S_1 - S_2 \approx 0,5$ pour $S_1/S_2=3$. Ces valeurs sont bien visibles sur les vues zoomées à droite de la figure 12.

Dans ce cas simple de deux sources ponctuelles monochromatiques de flux différents, l'observation interférométrique fournit donc à la fois la distance angulaire entre les sources et leurs flux respectifs, ce que ne peut pas fournir l'observation avec une antenne seule.

Notons que ces caractéristiques de l'objet formé des deux sources ont été obtenues avec une observation à la fréquence spatiale unique $\frac{b}{\lambda} = \frac{1}{4\delta}$. En fait, rien n'interdit qu'un objet différent formé de plusieurs sources puisse donner le même résultat, mais nous savons a priori que l'objet étudié est composé de deux sources ponctuelles. Pour éviter toute ambiguïté, il faut observer l'objet à plusieurs fréquences spatiales; nous allons en voir un exemple au paragraphe suivant.

2.5. Observation d'une source monochromatique non ponctuelle

Pour progresser dans la théorie basique de l'interféromètre à corrélation, nous étendons les résultats précédents à une source étendue à une dimension représentée par un segment rayonnant.

Décomposons le segment en sources élémentaires d'extension angulaire infinitésimale $d\theta$, produisant au niveau des antennes un flux de puissance $I_\lambda(\theta)d\theta$, où $I_\lambda(\theta)$ est le flux spécifique reçu par unité d'angle de la source. Nous admettrons que les émissions de ces sources élémentaires sont décorrélées entre elles, ce qui est un modèle réaliste de nombreuses radio-sources⁴.

⁴ on parle dans ce cas d'incohérence spatiale.

Supposons comme dans les paragraphes précédents que la direction de visée des antennes est au Sud, et que la source en transit devant les antennes s'étend entre les angles θ_1 et θ_2 (cf. figure 10). Adaptant les formules (12) et (13) au cas continu, nous écrivons, en posant $b_\lambda = \frac{b}{\lambda}$ et en restant dans le cas des petits angles:

$$R_{xy}(\theta_1, \theta_2) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} A_\lambda(\theta) I_\lambda(\theta) \cos(2\pi b_\lambda \theta) d\theta \quad (19a)$$

Suivant la même démarche qu'au § 2.4, nous appelons $\theta = 0,5(\theta_1 + \theta_2)$ l'écart angulaire entre la ligne de visée et la direction médiane du segment représentant la source. Posant $\theta_1 = \theta - \delta$ et $\theta_2 = \theta + \delta$, où δ est la moitié de l'extension angulaire de la source, nous étendons la relation (14) au cas continu en transformant la relation (19a) comme suit:

$$R_{xy}(\theta) = \int_{-\delta}^{\delta} A_\lambda(\theta - \eta) I_\lambda(\eta) \cos(2\pi b_\lambda(\theta - \eta)) d\eta \quad (19b)$$

Compte tenu de la faible variation de la réponse angulaire des antennes sur l'extension angulaire de la source, on pourra écrire:

$$R_{xy}(\theta) \approx A_\lambda(\theta) \int_{-\delta}^{\delta} I_\lambda(\eta) \cos(2\pi b_\lambda(\theta - \eta)) d\eta \quad (19c)$$

Le terme sous l'intégrale est le *produit de convolution* du flux spécifique de la source et de la *fonction propre* du mode de fréquence spatiale b_λ . Développant ce terme, nous obtenons:

$$R_{xy}(\theta) \approx A_\lambda(\theta) \left[\cos(2\pi b_\lambda \theta) \int_{-\delta}^{\delta} I_\lambda(\eta) \cos(2\pi b_\lambda \eta) d\eta + \sin(2\pi b_\lambda \theta) \int_{-\delta}^{\delta} I_\lambda(\eta) \sin(2\pi b_\lambda \eta) d\eta \right] \quad (20)$$

qui généralise la relation (17).

Utilisant l'identité $e^{ia} = \cos a + i \sin a$ (cf. annexe), nous pouvons considérer que $R_{xy}(\theta)$ suivant (19c) ou (20) est la partie réelle d'une fonction:

$$\boxed{R_{xy}(\theta) = \Re \left[A_\lambda(\theta) \int_{-\delta}^{\delta} I_\lambda(\eta) e^{i2\pi b_\lambda(\theta - \eta)} d\eta \right] = \Re \left[A_\lambda(\theta) e^{i2\pi b_\lambda \theta} \int_{-\delta}^{\delta} I_\lambda(\eta) e^{-i2\pi b_\lambda \eta} d\eta \right]} \quad (21)$$

le terme $e^{i2\pi b_\lambda \theta}$ traduisant le déphasage causé par l'écart entre la direction de visée des antennes et la position angulaire courante de la source. Si nous considérons le passage de celle-ci au méridien, soit $\theta = 0$, (21) se simplifie, et finalement l'intercorrélacion entre les signaux en sortie des deux antennes devient la partie réelle de la fonction de la fréquence spatiale b_λ suivante:

$$V(b_\lambda) = A_\lambda(0) \int_{\delta_1}^{\delta_2} I_\lambda(\eta) e^{-i2\pi b_\lambda \eta} d\eta \quad (22)$$

qui, compte tenu de l'extension angulaire de la source limitée à l'intervalle $[-\delta, \delta]$, s'écrit aussi, en normalisant la réponse en face des antennes à 1 et en posant $u = b_\lambda$ pour alléger les notations:

$$\boxed{V(u) = \int_{-\pi}^{\pi} I_\lambda(\eta) e^{-i2\pi u \eta} d\eta} \quad (23)$$

La fonction $V(u)$ est la *visibilité complexe* des franges; c'est, à un facteur près dépendant de la distance entre la source et l'instrument, la *transformée de Fourier* de la *distribution angulaire de luminosité* de la source. En faisant varier la fréquence spatiale u , on obtient le *spectre de visibilité* de

celle-ci. et prenant la transformée de Fourier inverse de $V(u)$, on obtient:

$$I_\lambda(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} V(u) e^{i2\pi\eta u} du \quad (24)$$

L'observation interférométrique donne donc accès aux détails de la source. La finesse de ces détails est conditionnée par la largeur du spectre spatial permise par l'instrument. La fréquence maximale est fixée par la longueur b de la base, et il est clair que plus cette longueur est grande plus on aura accès à des détails fins, conformément à la définition du pouvoir séparateur de l'instrument. Voyons sur quelques exemples simples comment cela fonctionne.

Considérons une source en forme de *segment de luminosité⁵ uniforme*, produisant une densité de flux $I_\lambda(\theta) = I_0$, transitant au méridien. Le calcul de l'intercorrélacion suivant (20), comme fonction de b_λ , donc comme la visibilité qui est une fonction réelle en raison de la symétrie de la source, donne:

$$V(b_\lambda) \approx A_\lambda(0) I_0 \int_{-\delta}^{\delta} \cos(2\pi b_\lambda \eta) d\eta = \frac{A_\lambda(0) I_0}{2\pi b_\lambda} [\sin(2\pi b_\lambda \delta) - \sin(-2\pi b_\lambda \delta)]$$

soit en normalisant à 1 la réponse en face des antennes :

$$V(b_\lambda) \approx I_0 \frac{\sin(\pi b_\lambda \cdot 2\delta)}{\pi b_\lambda} = I_0 \cdot 2\delta \frac{\sin(\pi b_\lambda \cdot 2\delta)}{\pi b_\lambda \cdot 2\delta} \quad (25)$$

où $I_0 \cdot 2\delta$ est le flux de puissance total reçu de la source. La visibilité varie donc comme la fonction sinus cardinal *sinc*, caractéristique de la transformée de Fourier d'un segment uniforme (figure 14a). Le premier zéro de (25) correspond à $b = \frac{\lambda}{2\delta}$, ce qui permet de mesurer l'extension spatiale de la source.

Considérons maintenant une *source en forme de disque rayonnant uniformément* (modèle simpliste du Soleil) transitant au méridien. L'interféromètre n'étant sensible qu'à la distribution du flux suivant la direction de la ligne de base, nous considérons la projection des éléments de surface du disque sur le segment de droite parallèle à cette direction. Le disque de rayon δ est donc découpé en segments d'extension angulaire infinitésimale $d\eta$ et de longueur $2 \cdot \overline{PM} = 2\delta \sin a$ suivant la figure 13:

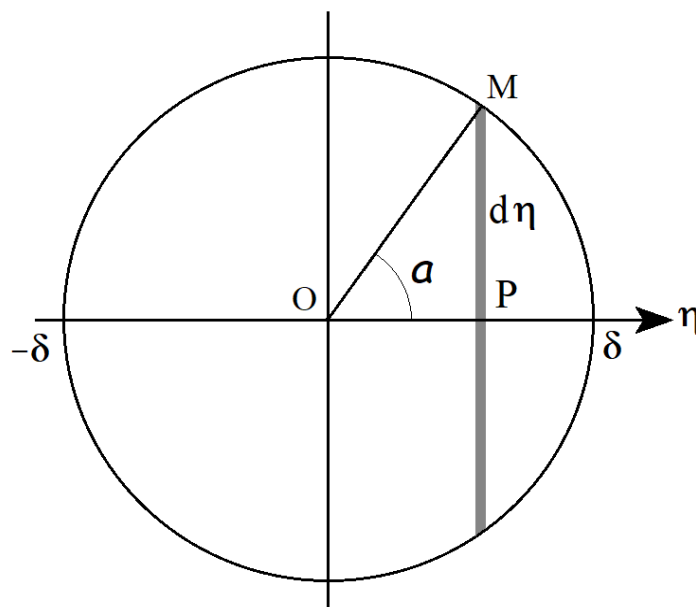


Figure 13: géométrie de la source en forme de disque. En gris: segment élémentaire de surface de largeur $d\eta$ centré sur le point P d'abscisse angulaire η .

5 Il s'agit donc ici de *luminosité spécifique* égale à la puissance émise par la source par unité de longueur ou de surface.

Nous avons $\overline{OP} = \eta = \delta \cos a$ d'où $a = \arccos(\frac{\eta}{\delta})$ et par conséquent l'aire du segment est égale à $2\delta \sin(\arccos(\frac{\eta}{\delta})) d\eta$. Si I_0 est le flux provenant d'une unité de surface de la source, la visibilité, qui est encore ici une fonction réelle en raison de la symétrie de la source, s'écrit, comme fonction de b_λ :

$$V(b_\lambda) \approx A_\lambda(0) I_0 \int_{-\delta}^{\delta} 2\delta \sin(\arccos(\frac{\eta}{\delta})) \cos(2\pi b_\lambda \eta) d\eta \quad (26)$$

L'intégrale est égale à un facteur près à la fonction de Bessel d'ordre 1 normalisée $\frac{J_1(w)}{w}$, avec $w = 2\pi b_\lambda \delta$, dont le premier zéro correspond à $b = 1,22 \frac{\lambda}{2\delta}$. Si la luminosité de la source n'est pas uniforme, notamment si elle décroît du centre du disque vers la périphérie, le comportement de la visibilité est modifié: le premier zéro correspond à une base plus longue. La figure 14b montre quelques exemples.

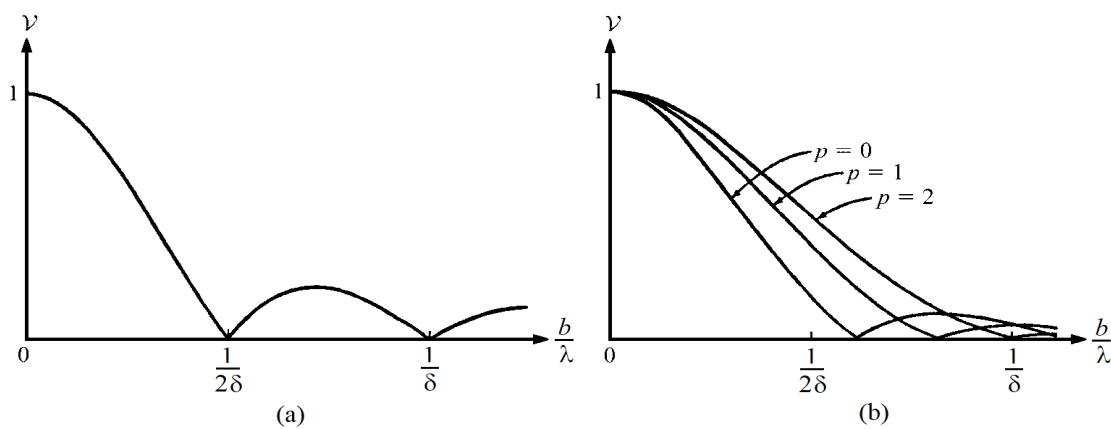


Figure 14: variation de la visibilité des franges avec la longueur de base suivant la géométrie de la source. (a): segment rayonnant uniforme d'extension angulaire 2δ ; (b): disque rayonnant de diamètre angulaire 2δ avec les distributions de luminosité $I(\eta) \approx (\delta^2 - \eta^2)^p$ $p=0$ correspond à une distribution uniforme. D'après [Bor05 figure 7.15 p. 306].

2.6. Observation d'une source ponctuelle dans un champ diffus

Ce type de problème, fréquent en radioastronomie, correspond par exemple à l'observation dans une bande de fréquences autour de 1420 MHz d'une radio-source extra galactique au travers du continuum radio superposé au rayonnement HI émis par notre Galaxie. Dans ce paragraphe, nous considérerons que la radio-source est ponctuelle et produit un flux de puissance S_λ au niveau des antennes. Le rayonnement diffus est représenté par un rayonnement non corrélé spatialement, isotrope, de luminosité uniforme I_0 , et d'extension spatiale 2δ plus étendue que l'ouverture angulaire des antennes.

Nous nous plaçons à nouveau dans le contexte du transit de la source au méridien, devant l'interféromètre de base orientée Est-Ouest. θ est l'écart angulaire entre la source et la direction de visée des antennes (le Sud). Nous avons en sortie de chaque antenne la superposition de deux signaux décorrélés entre eux, produisant à la sortie du corrélateur deux composantes de la fonction d'intercorrélacion.

La composante correspondant à la source ponctuelle est donnée par la relation (7), rappelée ici:

$$R_s(\theta) = S_\lambda A_\lambda(\theta) \cos(2\pi \frac{b}{\lambda} \sin \theta) \quad (7)$$

Quant au fond diffus, on admettra qu'il est représenté par le modèle de segment de luminosité uniforme étudié plus haut, de fonction d'intercorrélation, cf. (19b):

$$R_d(\theta) = I_0 \int_{-\delta}^{\delta} A_\lambda(\theta - \eta) \cos(2\pi b_\lambda \sin(\theta - \eta)) d\eta \quad (27)$$

Pour simplifier le problème, nous modélisons le gain en puissance A_λ des antennes par une fonction "porte" Π_a , valant A_0 entre les angles $-a$ et $+a$ correspondant au gain réel à mi-puissance, et 0 en dehors de cet intervalle; de plus, nous admettons que la règle des petits angles s'applique. Les relations (7) et (27) deviennent:

$$R_s(\theta) \approx S_\lambda \Pi_a(\theta) \cos(2\pi \frac{b}{\lambda} \theta) \quad (28)$$

et:

$$R_d(\theta) \approx I_0 \int_{-\delta}^{\delta} \Pi_a(\theta - \eta) \cos(2\pi b_\lambda(\theta - \eta)) d\eta \quad (29)$$

On obtient après quelques manipulations algébriques, et en utilisant l'hypothèse $\delta > a$:

$$R_d(\theta) \approx 2a I_0 A_0 \text{sinc}(2\pi b_\lambda a) \quad (30)$$

Nous avons donc un système de franges correspondant à la source ponctuelle donné par (28) superposé à un plancher indépendant de θ donné par (30). La frange centrale est centrée sur la direction de la source: il apparaît donc que l'interféromètre est capable de localiser une source ponctuelle (plus précisément d'extension angulaire petite devant la période spatiale λ/b visible par l'interféromètre) sur un fond diffus de façon bien plus efficace que les antennes seules.

On peut interpréter ce résultat comme un effet de la cohérence spatiale: une source ponctuelle ou d'extension angulaire trop petite pour être résolue par l'interféromètre est vue comme spatialement cohérente, alors qu'un fond diffus de grande extension angulaire est vu comme spatialement incohérent.

2.7. Observation d'une source de largeur de bande non nulle

L'hypothèse des sources monochromatiques faite jusqu'à présent est un cas idéalisé, qui ne correspond pas à la réalité physique. Les émissions des radio-sources sont généralement assimilables à un bruit occupant une bande plus ou moins large, et les récepteurs ont une bande passante limitée mais non réduite à une fréquence. De plus, vu la nature des mécanismes d'émission des radio sources, les composantes à différentes fréquences constituant le spectre du signal sont en général décorrélatées entre elles, et les variations du niveau du spectre en fonction de la fréquence sont assez lentes, au moins pour les émissions du continuum (bruit thermique, rayonnement synchrotron ...).

Suivant un raisonnement qualitatif [Bur10], il est facile de comprendre l'effet d'une largeur de bande B non nulle sur l'interférogramme. Considérons à nouveau l'exemple d'une source ponctuelle transitant en face d'un interféromètre de base orientée Est-Ouest (§ 2.2). Lorsque la source passe au méridien, le retard géométrique τ_g est nul et par conséquent les composantes des signaux $x(t)$ et $y(t)$ à toutes les fréquences dans la bande B sont en phase : l'interférence est constructive. Par contre, lorsque la source s'écarte de cette position, la phase des interférogrammes élémentaires correspondant à chaque composante spectrale est différente ; il en résulte une diminution de l'amplitude des franges, laquelle peut même s'annuler si l'écart est suffisant pour créer des interférences destructives. L'interférogramme résultant est plus étroit que celui obtenu avec une source monochromatique (ou à largeur de bande très étroite), et d'autant plus étroit que la bande B est large.

Nous pouvons obtenir la réponse de l'interféromètre à une source ponctuelle de largeur de bande

$B=[\nu_1, \nu_2]$ à partir de l'équation (8) correspondant à une source ponctuelle transitant au méridien devant l'instrument. Pour simplifier, nous supposons que le gain en fréquence G_0 de la chaîne de réception est constant dans la bande B . Avec $\lambda = c/\nu$ et restant dans le cas des petits angles θ , nous pouvons écrire :

$$R_{xy}(\theta) \approx G_0 \int_{\nu_1}^{\nu_2} S(\nu) A_\nu(\theta) \cos(2\pi b \theta \frac{\nu}{c}) d\nu \quad (31)$$

Admettant pour simplifier encore que la densité spectrale de flux $S(\nu)$ et la réponse angulaire des antennes $A_\nu(\theta)$ sont constantes dans la bande B de fréquence centrale $\nu_0 = (\nu_1 + \nu_2)/2$, la relation précédente devient :

$$R_{xy}(\theta) \approx G_0 S(\nu_0) A_{\nu_0}(\theta) \int_{\nu_1}^{\nu_2} \cos(2\pi b \theta \frac{\nu}{c}) d\nu = G_0 S(\nu_0) A_{\nu_0}(\theta) \frac{\sin(2\pi b \theta \frac{\nu_2}{c}) - \sin(2\pi b \theta \frac{\nu_1}{c})}{2\pi b \frac{\theta}{c}}$$

soit encore, après quelques manipulations élémentaires :

$$R_{xy}(\theta) \approx G_0 \cdot B S(\nu_0) \cdot A_{\nu_0}(\theta) \cos(2\pi \frac{b}{c} \nu_0 \theta) \operatorname{sinc}(\pi \frac{b}{c} B \theta) \quad (32)$$

Nous retrouvons donc l'interférogramme donné par (8), modulé par la fonction sinus cardinal paramétrée par la largeur de bande observée B . On notera que la quantité $B S(\nu_0)$ représente le flux total reçu de la source dans la bande B .

La figure 15 montre l'effet sur l'interférogramme d'une bande passante de largeur 10% de la fréquence centrale ν_0 , comparé à l'interférogramme obtenu pour une largeur de bande nulle, ou du moins très étroite par rapport à la fréquence centrale ν_0 (cf. figure 6). La fréquence spatiale $\frac{b}{\lambda_0} = \frac{b}{c} \nu_0$ vaut 500 (vue a) et 1000 (vue b). Le gain G_0 et le flux total de la source sont normalisés à 1.

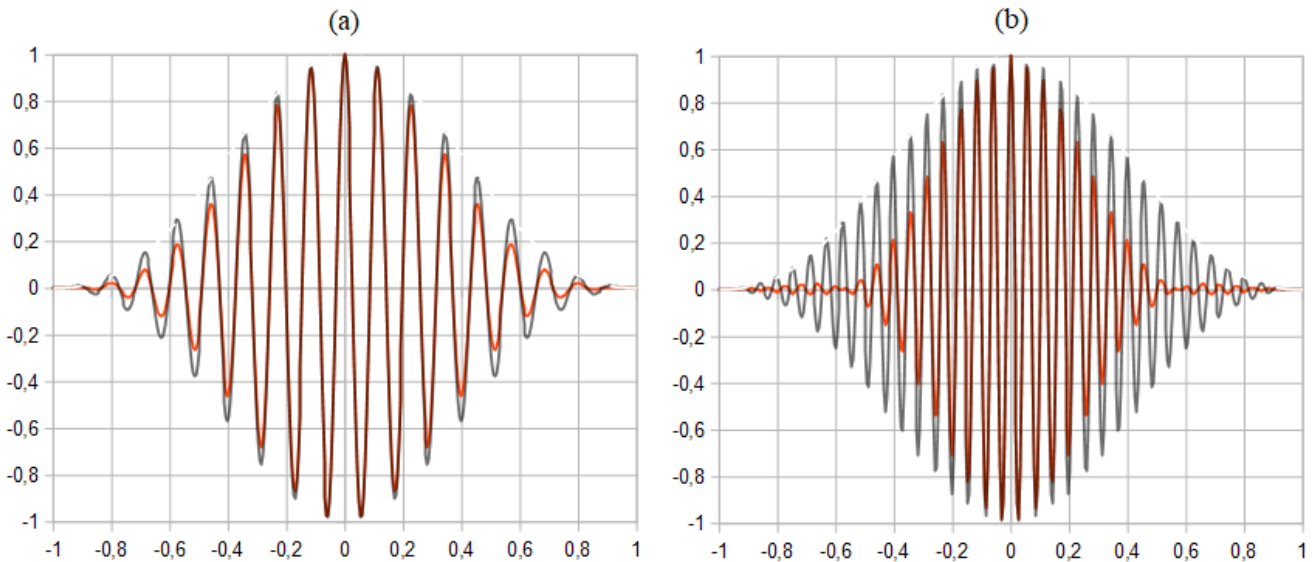


Figure 15 : interférogramme produit par une source ponctuelle transitant au méridien
 En abscisse: écart angulaire en ° ; en ordonnée: intercorrélacion normalisée.
 En rouge: résultat pour la bande B ; en gris: résultat pour la bande nulle.

L'effet de la bande passante se manifeste par la restriction de l'interférogramme à un lobe plus étroit (appelé *delay beam*) que le lobe principal des antennes. L'effet est d'autant plus marqué que la fréquence spatiale est élevée, autrement dit que la longueur de base est grande par rapport aux

longueurs d'onde radio observées. La bande de 10% de la fréquence centrale est plutôt large. Pour une largeur de bande ne dépassant pas quelques % l'effet devient négligeable aux fréquences spatiales étudiées ici.

Considérons un cas pratique à la fréquence $\nu_0 = 1420 \text{ MHz}$ et une bande passante de $B = 2 \text{ MHz}$, soit une largeur de bande relative de 0,00141. Les deux antennes ont une largeur de lobe à mi-puissance de 18° , et la longueur de base est de 16,8m, ce qui correspond à une fréquence spatiale de 80 périodes par radian. L'approximation des petits angles n'est plus valable, mais elle permet d'expliquer qualitativement les observations. La figure 16 montre l'interférogramme correspondant produit par une source ponctuelle de largeur de bande B , comparé à celui produit par une source monochromatique.

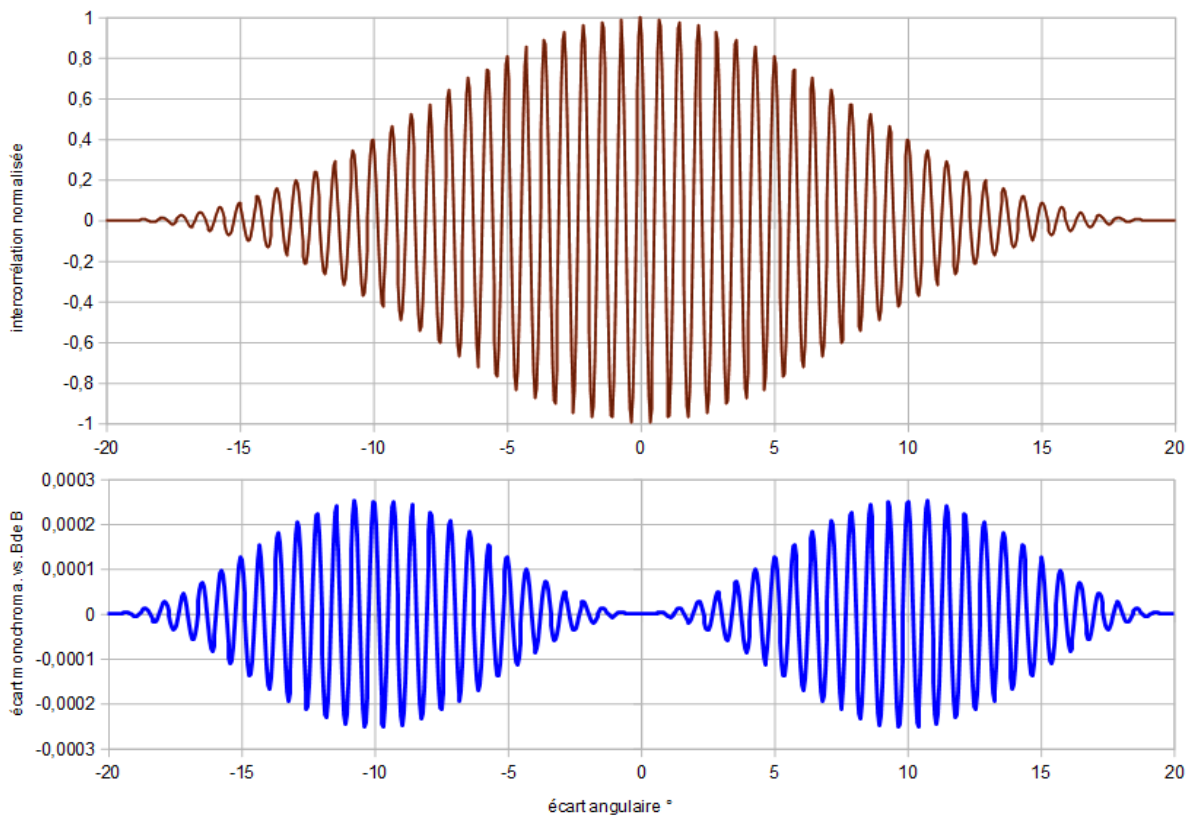


Figure 16 : interférogramme produit par une source ponctuelle transitant au méridien pour la fréquence spatiale 80. Largeur de bande relative $B/\nu_0 = 0,00141$.

En rouge: résultat pour la bande B ; en gris: résultat pour la bande nulle.

La courbe en bleu montre l'écart entre les deux interférogrammes.

Les deux interférogrammes sont pratiquement indiscernables, en raison de la faible largeur de bande relative. L'effet de la largeur de bande commence à apparaître pour une largeur relative de 3% environ.

Analysons ces résultats en terme de *cohérence temporelle*; celle-ci permet l'obtention d'interférences dans des conditions correspondant à des limites temporelle et spatiale bien définies.

Notant que, suivant la configuration géométrique de la figure 5, le retard géométrique s'exprime par $\tau_g = b \sin \theta / c$, soit $\tau_g \approx b \theta / c$ pour les petits angles, nous pouvons écrire la formule (31) comme suit:

$$R_{xy}(\tau_g) \approx G_0 \int_{\nu_1}^{\nu_2} S(\nu) A_\nu(\tau_g) \cos(2\pi \tau_g \nu) d\nu$$

qui, sous les hypothèses simplificatrices précédentes, conduit à l'équivalent de la formule (32):

$$R_{xy}(\tau_g) \approx G_0 \cdot B S(v_0) \cdot A_{v_0}(\tau_g) \cos(2\pi \tau_g v_0) \operatorname{sinc}(\pi \tau_g B) \quad (33)$$

La fonction sinc s'atténue rapidement pour $\tau_g B > 1$; l'inverse de la bande passante B représente le *temps de cohérence* τ_c des signaux. Nous déduisons donc d'après (33) que le temps de cohérence doit être supérieur au retard géométrique pour que l'on puisse observer un interférogramme.

Ceci justifie a posteriori l'introduction du retard instrumental τ_i pour observer l'interférogramme produit par une source transitant loin du méridien (§ 2.3); on doit dans ce cas remplacer τ_g par $\tau_g - \tau_i$ dans la formule (33), et la condition pour observer les interférogrammes est $\tau_g - \tau_i < \frac{1}{B}$.

On définit aussi la *longueur de cohérence temporelle* par $c \cdot \tau_c = \frac{c}{B}$: il faut que la différence des trajets des ondes entre les deux antennes soit inférieure à cette longueur pour que l'on puisse observer des franges.

Posant $c \cdot \tau_c = b \cos \alpha_c - c \cdot \tau_i$ (voir figure 3), nous avons $\cos \alpha_c = \frac{c}{b} (\tau_c - \tau_i) = \frac{c}{b} (\frac{1}{B} - \tau_i)$ qui relie l'angle limite d'observation α_c à la bande passante B , à la longueur de base b et au retard instrumental τ_i . En l'absence de celui-ci, l'angle limite d'observation est considérablement réduit et devient $\alpha_c = \arccos \frac{1}{B} \cdot \frac{c}{b}$.

Pour préciser la notion de temps de cohérence, considérons un signal réel $x(t)$, dont la fonction d'autocorrélation est $R_{xx}(\tau) = \langle x(t) \cdot x(t - \tau) \rangle$. Nous avons (voir annexe):

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_x(v) e^{2\pi i v \tau} dv \quad (34)$$

où $P_x(v)$ est la densité spectrale de puissance (dsp) du signal.

Supposons maintenant que le signal soit limité à la bande $B = [v_1, v_2]$; sa dsp est alors non nulle dans les intervalles $[-v_2, -v_1]$ et $[v_1, v_2]$ ⁶ et supposons de plus que cette dsp prenne dans ces intervalles une valeur constante P_{x0} . La résolution de l'intégrale dans la formule (34) donne:

$$R_{xx}(\tau) = 2 P_{x0} \cos(2\pi \tau v_0) \operatorname{sinc}(\pi \tau B) \quad (35)$$

où on a utilisé les relations $v_1 = v_0 - \frac{B}{2}$ et $v_2 = v_0 + \frac{B}{2}$. Cette formule est analogue à l'expression (33) de l'intercorrélation.

Les observations déjà faites sur le comportement de la fonction sinc s'appliquent ici: le premier zéro de la fonction est obtenu pour $\tau B = 1$, ce qui définit le temps de cohérence $\tau_c = \frac{1}{B}$, la longueur de cohérence étant égale à $\frac{c}{B}$.

6 La transformation de Fourier apparaissant dans (34) est bilatérale: la dsp est symétrisée par rapport à l'origine $v = 0$.

3. Conclusion

L'étude théorique simplifiée de l'interféromètre radio à deux antennes à corrélateur nous a permis d'introduire différentes notions et d'obtenir plusieurs résultats.

Une source ponctuelle monochromatique ou quasi-monochromatique produit un système de franges d'interférence dont l'espacement est la période spatiale (dont l'inverse est la fréquence spatiale), proportionnelle à la longueur d'onde radio observée et inversement proportionnelle à la longueur de base, et dont l'enveloppe est la courbe de gain des antennes.

Lorsque les antennes doivent être orientées suivant une direction α par rapport à la ligne de base pour suivre la trajectoire apparente d'une source, tout se passe comme si la longueur de la base était réduite dans le rapport $\sin \alpha$ par rapport à la visée en face, c.à.d. perpendiculaire à la ligne de base. La poursuite de la source dans plusieurs directions permet de l'observer à différentes fréquences spatiales, donc de connaître son spectre spatial.

L'observation d'un objet formé de deux sources ponctuelles proches a conduit à la notion de visibilité des franges, de résolution de l'objet et de pouvoir séparateur de l'interféromètre (pour une longueur d'onde radio donnée), d'autant meilleur que la longueur de base est grande. Si celle-ci permet de résoudre l'objet, on peut en déduire la séparation angulaire des deux sources et le rapport de leurs luminosités respectives.

L'étude de la réponse de l'interféromètre à une source étendue (c.à.d. non ponctuelle) a permis de préciser les notions de visibilité des franges et de spectre de visibilité. On a mis en évidence la relation fondamentale entre la visibilité et la distribution angulaire de luminosité de la source via la transformée de Fourier. Deux exemples simples de sources de luminosité uniforme ont montré comment on obtient la dimension angulaire de la source à partir des zéros de la fonction de visibilité.

On a montré, sous des hypothèses simplificatrices, que l'observation interférométrique d'une source ponctuelle dans un champ diffus permet de localiser la source avec une précision très supérieure à celle limitée par la directivité propre des antennes. On a mis en évidence à cette occasion la notion de cohérence spatiale.

Enfin, la prise en compte d'une bande de rayonnement radio non réduite à une seule fréquence a montré que la largeur de l'interférogramme est limitée par rapport à celui d'une source monochromatique, cette limitation étant d'autant plus importante que la largeur de bande relative est grande et que la fréquence spatiale observée (ou la plage de fréquences spatiales observées) est élevée. On a fait le lien avec les notions de temps de cohérence et de longueur de cohérence temporelle qui ont été précisées, et l'importance du retard instrumental a été justifiée.

Dans la seconde partie du mémoire, on complétera l'étude théorique en généralisant ces résultats aux sources spatialement étendues sur le plan du ciel, et on mettra en évidence la relation fondamentale entre la visibilité des franges dans le plan (u, v) des fréquences spatiales et la distribution spatiale de la luminosité des sources, qui est l'apport le plus important des techniques d'interférométrie. On montrera comment construire la fonction de visibilité à partir de l'observation suivant des bases d'orientations différentes, en réalisant la synthèse de l'ouverture d'un instrument fictif offrant une résolution spatiale équivalente. On traitera aussi de la réalisation pratique des interféromètres, en particulier de l'impact des écarts et des biais par rapport aux hypothèses de l'étude théorique sur les performances réelles, et sur la conduite des observations interférométriques.

4. Annexe : quelques rappels mathématiques

4.1. Formules trigonométriques de base

Unité d'angle : 1 radian = $\pi/180$ degré.

L'angle sous-tendu par un cercle complet vaut 360° , soit 2π radians.

Subdivisions du degré : minute d'arc : $1/60^{\text{ème}}$ de degré ; seconde d'arc : $1/3600^{\text{ème}}$ de degré.

Etant donnés deux angles a et b , on a :

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

Il en résulte :

$$\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin(2a) = \sin(a+a) = 2 \sin a \cos a$$

et, posant $a = p+q$, $b = p-q$:

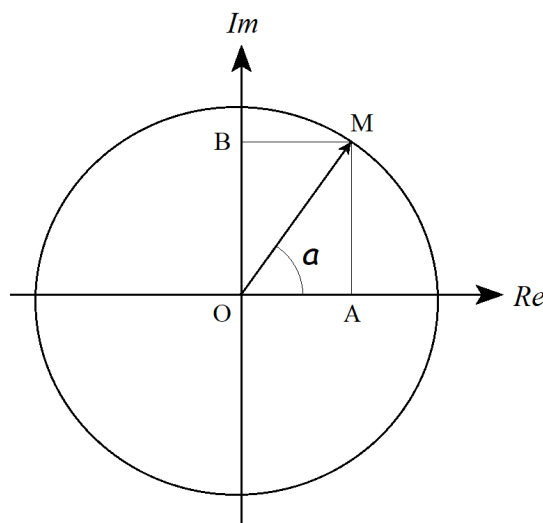
$$\cos a + \cos b = 2 \cos(p+q) \cdot \cos(p-q) \quad , \text{ soit: } \cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\text{de même: } \cos a - \cos b = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\text{et: } \sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad , \quad \sin a - \sin b = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

4.2. Représentation complexe

Les nombres complexes sont des couples de nombres réels, le premier nombre étant la partie réelle et le second la partie imaginaire. Ils peuvent être représentés commodément par la figure plane ci-après :



Le nombre complexe est représenté par le vecteur \mathbf{OM} . La longueur r de ce vecteur est le module du nombre et l'angle a est son argument.

On a : $\overline{OA} = r \cos a$ et $\overline{OB} = r \sin a$, et $r^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2$.

Prenons $r=1$ (vecteur unitaire) pour simplifier l'écriture. Nous écrivons le nombre représenté par le vecteur \mathbf{OM} sous la forme conventionnelle :

$$e^{ia} = \cos a + i \sin a \quad \text{avec} \quad i^2 = -1$$

Nous avons les propriétés et relations suivantes, pouvant être déduites directement de la figure :

$$e^{i\pi/2} = i, \quad e^{i\pi} = -1$$

$$\cos a = \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}, \quad \sin a = \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}$$

En utilisant la propriété de la fonction exponentielle $e^{i(a+b)} = e^{ia} \cdot e^{ib}$ et les relations ci-dessus, nous pouvons retrouver toutes les formules trigonométriques de base.

On en déduit aussi des formules approchées aux petits angles pour les fonctions trigonométriques \cos et \sin en utilisant le développement en série entière de la fonction exponentielle. On a pour tout x réel ou complexe :

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2} + \frac{(ix)^3}{6} + \dots, \quad \text{soit, en ne gardant que les termes jusqu'à l'ordre 2:} \quad e^{ix} \approx 1 + ix - \frac{x^2}{2}.$$

On aura donc pour les petits angles a (en radians) : $\cos a \approx 1 - \frac{a^2}{2}$ et $\sin a \approx a$.

4.3. Transformation de Fourier et relations fondamentales

La transformation de Fourier, telle qu'elle intervient dans ce mémoire, permet de représenter une fonction F d'une variable réelle t intégrable par une autre fonction S d'une variable réelle ν , sa transformée de Fourier qui est son *spectre*.

Elle est définie par les relations duales suivantes :

$$S(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \quad \text{et} \quad F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu$$

Considérons un signal réel $x(t)$ de transformée de Fourier $X(\nu)$, dont la fonction d'autocorrélation est $R_{xx}(t) = \langle x(\tau) \cdot x(t-\tau) \rangle$. Soit $P_x(\nu) = X(\nu) X^*(\nu)$ (où $*$ désigne la conjugaison complexe) la densité spectrale de puissance (dsp) du signal. La propriété fondamentale en traitement du signal dérivée du théorème de Wiener-Khintchine, qui relie la fonction d'autocorrélation et la dsp via la transformation de Fourier, peut s'écrire :

$$R_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_x(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu, \quad \text{avec la relation duale} \quad P_x(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(t) e^{-i2\pi\nu t} dt$$

Le signal x étant réel, sa dsp a la propriété de symétrie hermitienne, c'est-à-dire $P_x(-\nu) = P_x^*(\nu)$. Il en résulte que la fonction d'autocorrélation est une quantité réelle, homogène à une puissance.

Etant donnés deux signaux réels représentés respectivement par les fonctions $x(t)$ et $y(t)$, de transformées de Fourier respectives $X(\nu)$ et $Y(\nu)$, le théorème de Wiener-Khintchine appliqué à l'intercorrélacion des deux signaux permet d'écrire :

7 On ne considère ici que des espaces à une dimension. Le propos sera généralisé à l'espace à deux dimensions dans la seconde partie du mémoire, où il sera question notamment de synthèse d'ouverture.

$$R_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) Y^*(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu, \text{ avec la relation duale } X(\nu) Y^*(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(t) e^{-i2\pi\nu t} dt.$$

La fonction $X(\nu) Y^*(\nu)$ est le *spectre croisé* ou *interspectre* des signaux x et y .

Théorème de convolution: soit f et g deux fonctions réelles intégrables de la variable réelle t , de transformées de Fourier respectives F et G . La convolution de f et de g s'exprime, de façon analogue à l'intercorrélacion, par la relation:

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$$

dont la transformée de Fourier est égale au produit des transformées de Fourier des deux fonctions, soit:

$$F(\nu) \cdot G(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f * g(t) e^{-i2\pi\nu t} dt$$

5. Références bibliographiques et sites internet

- [Bor05] M. Born & E. Wolf, *Principles of Optics*. Cambridge University Press, 7th Ed. Reprinted 2005.
- [Bur10] B. F. Burke & F. Graham-Smith, *An Introduction to Radio Astronomy*. Cambridge University Press, 3rd Ed., 2010. En particulier les chapitres 5 et 6.
- [Kra86] J. Kraus, *Radio Astronomy*. Cygnus-Quasar Books, 2nd Ed., 1986.
- [Len08] P. Léna & D. Rouan, *L'Observation en astrophysique*. EDP Sciences / CNRS Editions, 3^{ème} édition, 2008.
- [Mai12] J. J. Maintoux, « Radioastronomes : à l'écoute de la Galaxie », *L'Astronomie*, n° 54, pages 50-54, Octobre 2012 – page web: https://flehn.pagesperso-orange.fr/pages_radioastro/Images_Docs/Article_21cm_Astronomie_2012.pdf
- [Rog76] A. E. E. Rogers, Theory of Two-Element Interferometers. in *Methods of Experimental Physics*, Vol. 12 Part C, Chap. 5: Interferometers and Arrays, Academic Press, 1976.
- [Roh04] K. Rohlfs & T. L. Wilson, *Tools of Radio Astronomy*. A&A Library, Springer, 4th Ed., 2004. En particulier le chapitre 8: Interferometers and Aperture Synthesis.
- [Tho16] A. R. Thompson, J. M. Moran & G. W. Swenson Jr., *Interferometry and Synthesis in Radio Astronomy*. A&A Library, Springer, 3rd Ed., 2016.