

ORPB – Mémoire 2020-03

Correction géométrique des observations dans le plan azimut-élévation

Rédacteur : A. Gilloire – 23/04/2020, révisé le 10/05/2020

Préambule : but de ce mémoire

Plusieurs campagnes d'observations ont été réalisées à PB8 depuis plus de 5 ans, au cours de la mise au point du tracking et pour essayer de caractériser les propriétés de directivité de l'antenne. Des déformations observées dans la représentation des données n'ont pas été expliquées sur le moment faute d'une analyse correcte du problème. Lucien Macé a cependant attiré l'attention à l'époque sur l'influence probable de l'élévation sur ces déformations. Ce mémoire a pour but de résoudre définitivement le problème en présentant l'explication correcte (connue) de sa cause et en donnant une méthode simple (connue) pour corriger les représentations déformées.

Transcription des observations en repère local azimut-élévation par projection cylindrique

Quand on fait en un lieu donné de la surface terrestre une observation du ciel avec un télescope ou un radiotélescope à monture alt-azimutale, on attache à celui-ci un référentiel local, dont le plan Oxy coïncide avec le plan horizontal tangent à l'ellipsoïde terrestre au lieu considéré et dont l'axe Oz est la normale à ce plan (direction du zénith). Le point (astre) visé depuis le point d'observation O (le foyer du télescope) est implicitement situé sur une sphère céleste centrée sur le point O et repéré classiquement par ses coordonnées angulaires azimut a et élévation ou hauteur h , conformément à la figure 1.

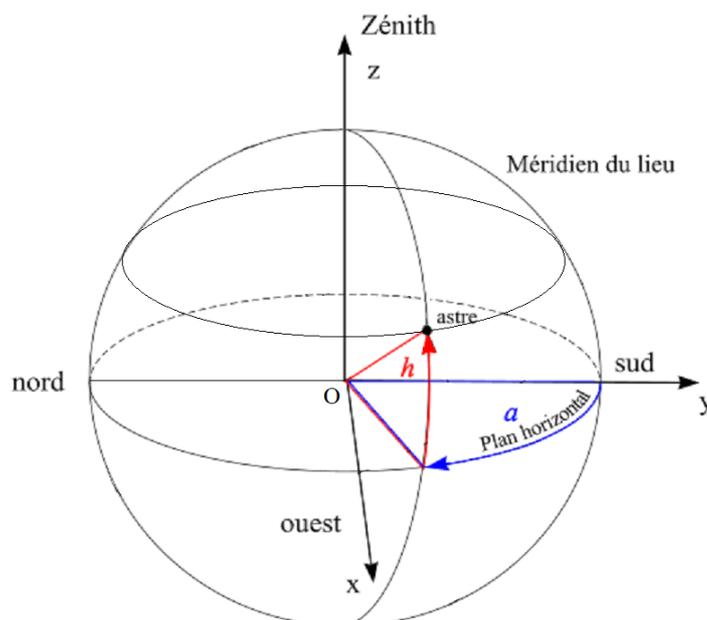


Figure 1 : repère local alt-azimutal (d'après ASM/Patrick Rocher – media4.obspm)

De façon analogue à la cartographie de la Terre, on transcrit les observations astronomiques par

projection sur une carte plane munie d'un système de coordonnées rectangulaire suivant deux axes représentant l'azimut et l'élévation, le point observé sur la sphère céleste de la figure 1 étant représenté par un point sur le plan de la carte.

Cette projection peut être faite de différentes façons. On s'intéresse ici à la projection dite cylindrique équidistante : on considère un cylindre droit s'appuyant sur le grand cercle défini par l'intersection du plan horizontal avec la sphère céleste et dont l'axe est aligné sur l'axe zénithal du lieu (voir figure 2), et on projette le point sur ce cylindre en respectant l'équidistance des repères de graduation sur la coordonnée d'élévation (échelle linéaire). La carte est obtenue par déroulement à plat du cylindre.

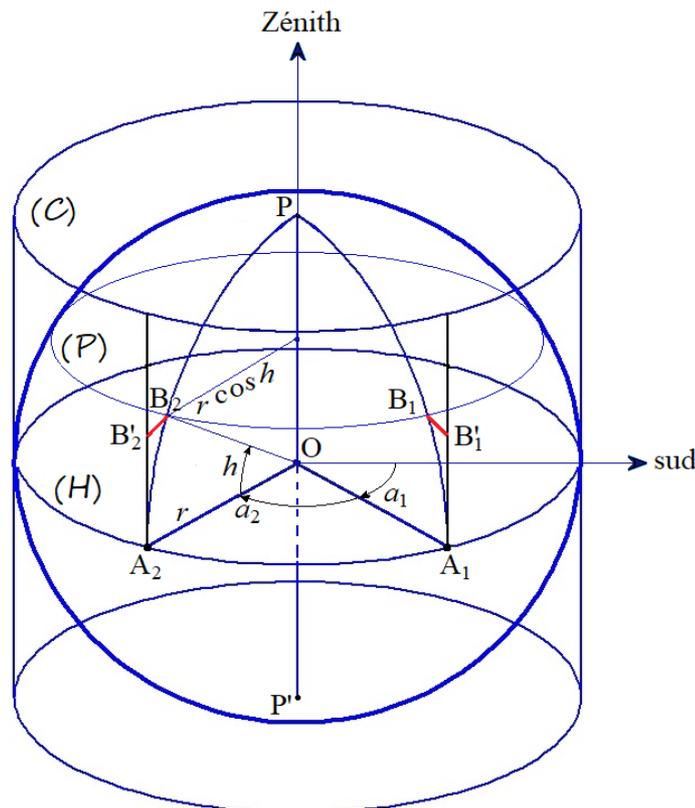


Figure 2 : projection cylindrique de la sphère locale de la figure 1 (d'après Astro-Alps)
Le cylindre droit (C) support de la carte est aligné sur l'axe zénithal PP'
et s'appuie sur le grand cercle horizontal de la sphère.

Considérons sur la figure 2 l'arc A_1B_1P formé par l'intersection de la sphère et du plan contenant l'axe zénithal vertical PP' et le rayon OA_1 dans le plan horizontal (H) . Les points sur cet arc ont comme coordonnée d'azimut l'angle a_1 compté par convention à partir du Sud (méri dien du lieu) dans le sens horaire¹. B_1 est l'un de ces points, situé sur le petit cercle ou parallèle (P) , d'élévation h . On appelle B'_1 la projection de ce point sur le segment de génératrice du cylindre (C) qui passe par le point A_1 .

Considérons maintenant l'arc A_2B_2P formé par l'intersection de la sphère et du plan contenant l'axe vertical PP' et le rayon OA_2 . Les points sur cet arc ont comme coordonnée d'azimut l'angle a_2 . B_2 est le point, situé sur (P) , d'élévation h . ; on appelle B'_2 la projection de ce point sur le segment de génératrice du cylindre (C) qui passe par le point A_2 .

Quelle que soit la façon dont la projection est réalisée (segments en rouge sur la figure 2), la

¹ Dans le cas du positionnement de PB8 choisi, cet angle est compté depuis le Nord ; l'azimut du Sud est alors 180° .

projection cylindrique créée une distorsion des distances suivant la coordonnée d'azimut, qui dépend de la coordonnée d'élévation.

En effet, pour un angle d'élévation h donné, considérons l'arc sur la sphère situé entre les points B_1 et B_2 . Cet arc appartient au petit cercle (\mathcal{P}) de rayon $r \cos h$ où r est le rayon (arbitraire) de la sphère. Sa longueur est $r \cos h \cdot (a_2 - a_1)$, alors que l'arc projeté sur le cylindre entre les points B'_1 et B'_2 a pour longueur $r \cdot (a_2 - a_1)$. La projection sur le cylindre est donc affectée d'une distorsion des distances suivant la coordonnée d'azimut, dont l'amplitude est inversement proportionnelle au cosinus de l'angle d'élévation.

Si on amène B_1 sur A_1 d'une part, et B_2 sur A_2 d'autre part, on est dans le plan horizontal ($h = 0$) et l'arc A_1A_2 sur la sphère coïncide avec sa projection sur le cylindre. Il n'y a donc pas distorsion de la distance dans ce cas particulier, et c'est le seul.

Le principe de la projection cylindrique équidistante est illustré figure 3. Les points A, B, C et D sur la sphère ont la même coordonnée d'azimut a ; leurs coordonnées d'élévations respectives sont 0° , 30° , 60° et 90° . Les points $A'=A$, B' , C' et D' sont les projections (matérialisées par les segments en rouge) de ces points sur le segment de génératrice du cylindre (\mathcal{C}). Ces points sont équidistants, d'où le nom de projection équidistante. Cela se traduit sur la carte azimut – élévation par des graduations à pas constant sur les deux axes.

Noter que les points projetés A' à D' ne sont pas obtenus par construction géométrique, mais par report de la coordonnée d'élévation h des points A à D sur la carte suivant un pas de graduation constant.

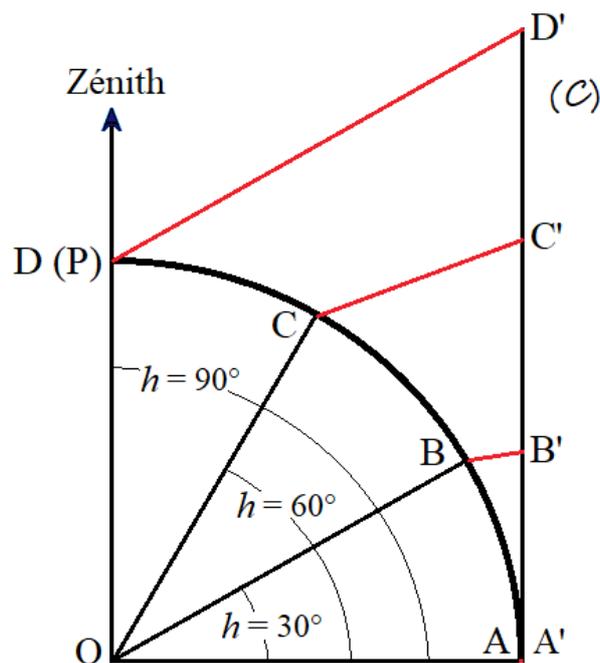


Figure 3 : principe de la projection cylindrique équidistante

Pour la lisibilité de la représentation, les segments projetés sur le cylindre (\mathcal{C}) ont la même longueur que les arcs correspondants sur la sphère. Ce choix est arbitraire.

La projection cylindrique équidistante ne conserve ni les angles ni les distances entre points sur l'axe azimut ; par contre les distances suivant l'axe élévation sont conservées par définition. Rappelons qu'une autre projection cylindrique bien connue est la projection de Mercator, utilisée en géographie, qui conserve les angles (projection dite conforme) mais pas les dimensions relatives des différentes

parties de la surface terrestre.

La déformation des objets suivant l'azimut, croissante avec l'élévation, est représentée sur la figure 4 qui montre l'indicatrice de déformation de Tissot pour la projection cylindrique équidistante, sur l'exemple habituel de la carte de la Terre où longitude et latitude sont équivalents à azimut et élévation du repère local. On observe l'allongement suivant la longitude des figures circulaires, nul à l'équateur et croissant avec la latitude.

Par comparaison, la figure 5 représente l'indicatrice de déformation de Tissot pour la projection cylindrique conforme de Mercator : les figures circulaires sur l'équateur subissent une dilatation croissant avec la latitude, la conservation des angles se traduisant par la conservation de la forme circulaire.

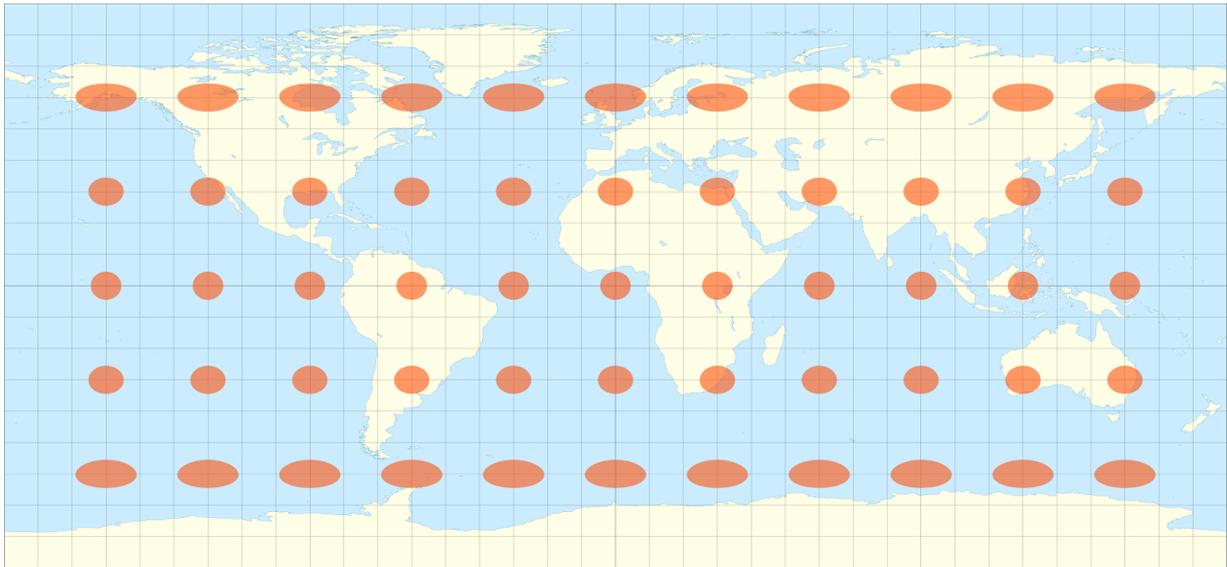


Figure 4 : indicatrice de déformation de Tissot pour la projection cylindrique équidistante

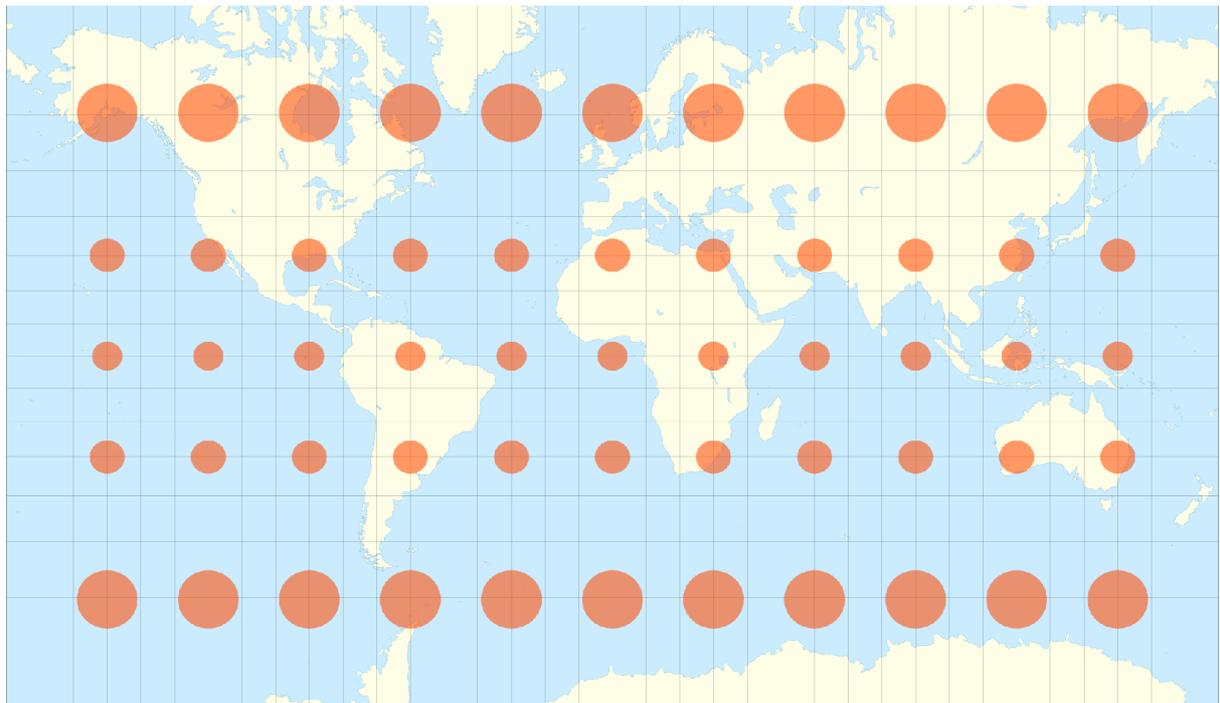


Figure 5 : indicatrice de déformation de Tissot pour la projection cylindrique de Mercator (tronquée)

On remarque que pour une latitude h donnée, l'allongement suivant la longitude est le même pour les deux projections, comme noté précédemment pour toutes les projections cylindriques droites (déformation en $(\cos h)^{-1}$).

Méthode alternative

Une méthode voisine, signalée par J. P. Blot, est présentée par W. Bornemann dans un document du consortium EUTELSAT (voir référence à la fin du présent mémoire). Dans cette méthode, l'élément géométrique utilisé pour obtenir l'écart angulaire azimut corrigé est la corde sous-tendue par l'arc $B_1 B_2$ (corde CD sur le schéma page 3 du document) au lieu de l'arc proprement dit.

La formule de correction est plus compliquée. En reprenant les notations du mémoire et en posant $\delta a = a_2 - a_1$ pour l'écart angulaire azimut, on obtient :

$$\delta a_{\text{corrigé}} = 2 \arcsin \left(\sin \frac{\delta a_{\text{mesuré}}}{2} \cdot \cos h \right)$$

Pour les petits écarts angulaires δa , les deux méthodes donnent des résultats très proches, comme on peut le montrer à partir des développements limités des fonctions arcsin et sin.

La figure 6 montre le rapport des écarts angulaires azimut corrigés obtenus par les deux méthodes (projection / méthode Bornemann) pour différents angles d'élévation. On observe une différence minimale sur la plage d'écarts angulaires az mesurés (0 à 5°) qui est présentée.

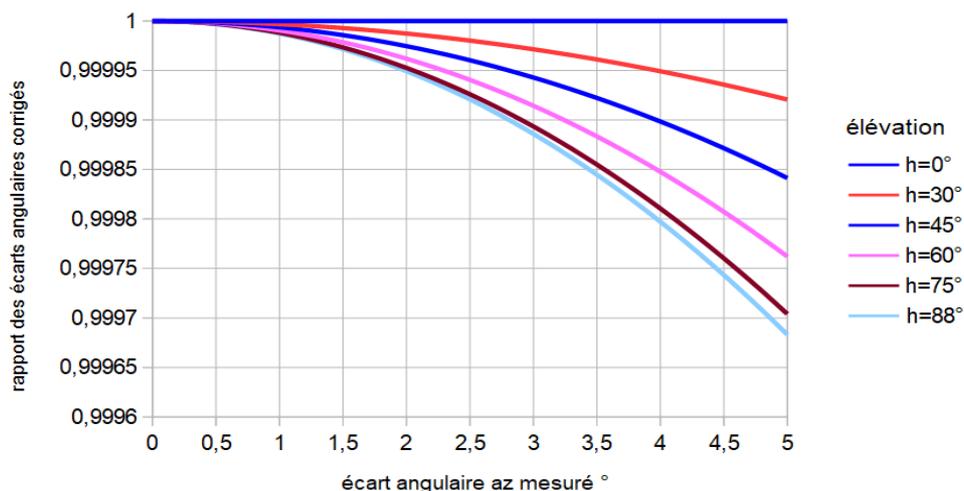


Figure 6 : rapport des écarts angulaires az corrigés pour les deux méthodes, à plusieurs élévations

Méthode de correction de la représentation des données d'observation

On considère ici la méthode de projection. Le principe, simple et bien connu, est d'appliquer localement une déformation inverse de la déformation en $(\cos h)^{-1}$ aux longueurs suivant la coordonnée d'azimut, en gardant inchangées les longueurs suivant la coordonnée d'élévation. La méthode est locale parce que la sphère est une surface non développable : il est impossible d'étaler globalement la surface d'une sphère sur un plan sans déformation.

On considère sur la sphère un point central de coordonnées angulaires a_0 et h_0 dont on veut représenter un voisinage (par exemple un disque de rayon angulaire ρ entourant ce point) sur la carte plane avec un minimum de déformation. Pour cela, on trace sur le plan de la carte un axe vertical de coordonnée

a_0 , et pour chaque valeur de la coordonnée d'élévation h comprise entre $h_0 - \rho$ et $h_0 + \rho$ on reporte sur le plan la distance, obtenue par la projection cylindrique, entre l'axe et chaque point du disque en la multipliant par le facteur de correction $\cos h_0$.

Noter que l'on pourrait, pour plus d'exactitude, appliquer un facteur de correction $\cos h$ variable suivant la coordonnée d'élévation ; cependant, si l'on considère un voisinage suffisamment petit (ρ ne dépassant pas quelques degrés) ce choix n'introduit qu'un écart très faible par rapport au facteur de correction constant $\cos h_0$.

Application aux données d'observations obtenues à PB8

Remarquons d'abord que la projection de la surface interceptée sur la sphère par l'angle solide correspondant au champ de l'instrument (défini par le lobe principal du diagramme de rayonnement de l'antenne) subit la déformation en $(\cos h)^{-1}$, ainsi d'ailleurs que l'ensemble du diagramme de rayonnement. Nous pouvons donc appliquer la méthode de correction à la figure du diagramme de rayonnement obtenue par balayage ou par transit de source céleste, comme aux images radio obtenues par balayage de sources « étendues » (c.à.d. de dimensions angulaires supérieures à la largeur du lobe principal de l'antenne), par exemple le Soleil ou la Lune observés en bande C.

Les essais ont été réalisés grâce aux logiciels développés par Olivier Boeffard dans le cadre de la mise au point du système de tracking de l'antenne.

Essais sur satellites géostationnaires

Une campagne d'acquisition de mesures pour évaluer la directivité de l'antenne a été réalisée en Mars 2015. Les mesures ont été obtenues par balayage suivant une grille azimut-élévation à pas régulier, en utilisant comme source céleste ponctuelle d'azimut et d'élévation fixes la balise en bande C de différents satellites géostationnaires.

Les images en 2D du diagramme de rayonnement de l'antenne obtenues montrent un allongement suivant l'azimut, comme on le voit sur l'exemple de la figure 7a obtenu avec la balise à 4999,5 MHz du satellite Eutelsat ES 5WA. Les coordonnées angulaires de ce satellite vu de PB8 à Pleumeur-Bodou sont : azimut = 2° Ouest comptés à partir du Sud, soit 182° dans le système de coordonnées attaché à l'antenne, et élévation = 34° comptés à partir du plan horizontal. La figure 7b montre le résultat de la correction en cosinus de l'image pour $\cos(34^\circ) = 0,829$, qui rétablit la circularité (approximative) attendue du lobe principal du diagramme de rayonnement et du premier lobe secondaire.

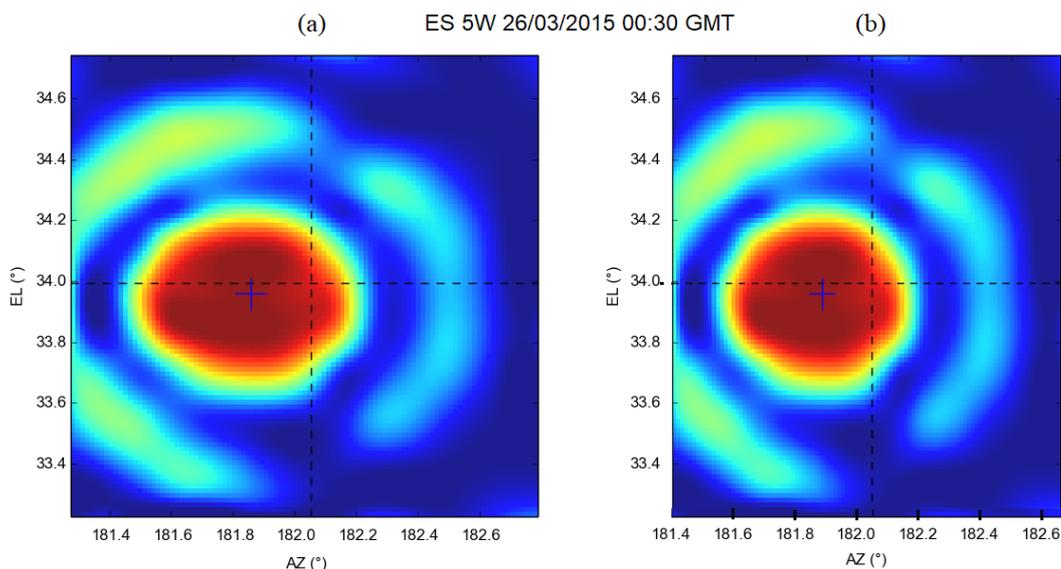


Figure 7 : diagramme de rayonnement obtenu par balayage sur le satellite ES 5WA
fréquence : 4199,5 MHz (LHCP) – échelle des niveaux (couleurs) inconnue
(a) : sans correction en cosinus – (b) : avec correction

Essais sur le Soleil

Des images radio du Soleil à 4000 MHz obtenues par balayage ont été réalisées en Avril 2015 lors d'essais de mise au point du tracking. Un résultat typique est présenté figure 8. L'élévation moyenne sur l'acquisition est de $47,49^\circ$, soit un facteur de correction en cosinus moyen de 0,676. L'image corrigée (b) fait apparaître la forme circulaire attendue, résultant de la convolution du centre du diagramme de rayonnement de l'antenne et du disque solaire.

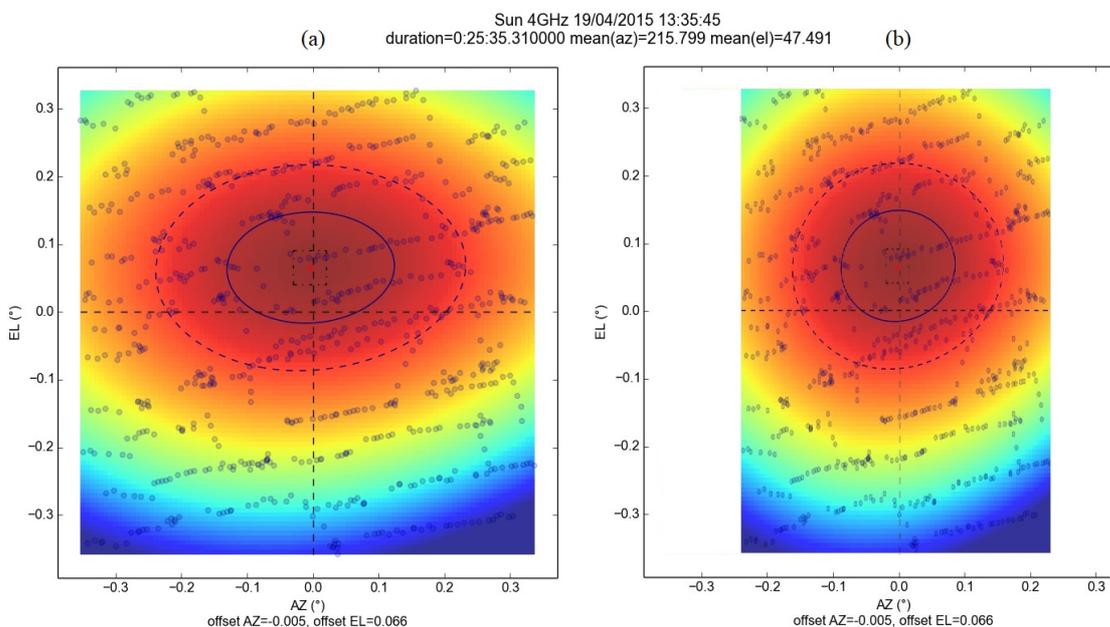


Figure 8 : image du Soleil à 4000 MHz – échelle des niveaux sur 18 dB
les cercles en traits pleins et pointillés sont des coupes de surface respectivement à -0,5dB et -1dB
(a) : sans correction en cosinus – (b) : avec correction

En conclusion, ces résultats illustrent la nécessité de la correction en $\cos(h)$ sur les distances angulaires en azimut, et montent la validité de la méthode.

Références

Voir les articles de wikipedia : système de coordonnées horizontales, projection cylindrique équidistante.

Sur les indicatrices de Tissot, par exemple la page : <https://magrit.hypotheses.org/139>

Voir aussi :

les pages pédagogiques sur la notion de repère de l'Observatoire de Paris-Meudon
https://media4.obspm.fr/public/ressources_lu/pages_defrepere/

Françoise Duquenne, « Les représentations planes de la Terre », revue XYZ n° 156, pp. 36-42, 3^{ème} trimestre 2018.

Site : http://cnig.gouv.fr/wp-content/uploads/2018/09/XYZ156_representations_planes.pdf

et aussi bien sûr le wiki ORPB dans lequel les résultats détaillés des essais réalisés en 2015 sont rapportés : <http://wiki.orpb.fr/>

Méthode alternative : voir W. Bornemann : Azimuth Correction for Elevation-over-Azimuth Positioners, document EUTELSAT, Mai 2018.

Site : https://www.eutelsat.com/files/contributed/support/pdf/Azimuth_Correction.pdf